ŘEŠENÍ PŘEURČENÝCH SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC METODOU NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

- v případě, že je více rovnic než neznámých a soustava je přeurčená
- $A \cdot X = B$

př: Najděte přibližné řešení soustavy rovnic MNČ a vypočtěte normu vektoru vzniklých chyb řešení dané soustavy.

1, způsob nalezení normální soustavy
2, způsob transponovanou maticí

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x \quad &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

- přeurčená soustava
- přímým řešením nemá řešení

1, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $\varphi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

⇒ skalární součin vektorů

$\langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(1)} \rangle = 2$, $\langle \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} \rangle = 1$, $\langle \varphi^{(1)}, \varphi \rangle = 1$,
$\langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(1)} \rangle = 1$, $\langle \varphi^{(2)}, \varphi^{(2)} \rangle = 2$, $\langle \varphi^{(2)}, \varphi \rangle = 1$

⇒ soustava v maticovém tvaru: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$

→ 2, $A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot B$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

- Řešení: $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 2x + y = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1-y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow -3y = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \end{array}$

$K = \{ (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})^T \}$

- Chyby řešení: $x+y=1 \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1 \Rightarrow 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$
  $x = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow 0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$
  $y=0 \Rightarrow \frac{1}{3}=0 \Rightarrow 0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$

~~→ vektor chyb: (~~

$\varphi^* = x_1\varphi^{(1)} + x_2\varphi^{(2)} + \ldots + x_n\varphi^{(n)}$ ... vektor chyb

$\varphi^* = \frac{1}{3}(1,1,0) + \frac{1}{3}(1,0,1) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

norma vektoru chyb: $\|\varphi - \varphi^*\|_2$

$\|\varphi-\varphi^*\|_2 = \sqrt{(1-\frac{2}{3})^2 + (0-\frac{1}{3})^2 + (0-\frac{1}{3})^2} = \underline{\underline{0{,}57735}}$

Př: $x_1 + x_2 = 1$
$x_1 - x_2 = 1$
$x_1 + 2x_2 = 3$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \varphi^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \varphi^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \varphi = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

$\langle\varphi^{(1)},\varphi^{(1)}\rangle = 3, \quad \langle\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}\rangle = 2, \quad \langle\varphi^{(1)},\varphi\rangle = 5$
$\langle\varphi^{(2)},\varphi^{(1)}\rangle = 2, \quad \langle\varphi^{(2)},\varphi^{(2)}\rangle = 6, \quad \langle\varphi^{(2)},\varphi\rangle = 6$

$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 6 \end{array}\right)$ → Cramerovo pravidlo: $|A| = \begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 6\end{vmatrix} = 18-4 = 14$

$|A_1| = \begin{vmatrix}5 & 2\\6 & 6\end{vmatrix} = 30-12 = 18 \qquad x_1 = \frac{18}{14} = \frac{9}{7}$

$|A_2| = \begin{vmatrix}3 & 5\\2 & 6\end{vmatrix} = 18-10 = 8 \qquad x_2 = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

$\underline{\underline{K = \{(\frac{9}{7}, \frac{4}{7})^T\}}}$

Chyby: $x_1 + x_2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{7} + \frac{4}{7} = \frac{13}{7} \doteq 1{,}857142857$
$x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow \frac{9}{7} - \frac{4}{7} = \frac{5}{7} \doteq 0{,}7142857714$
$x_1 + 2x_2 = 3 \Rightarrow \frac{9}{7} + \frac{8}{7} = \frac{17}{7} \doteq 2{,}428571429$

$\varphi^* = x_1 \cdot \varphi^{(1)} + x_2 \cdot \varphi^{(2)} = \frac{9}{7}(1,1,1) + \frac{4}{7}(1,-1,2) = (\frac{13}{7}, \frac{5}{7}, \frac{17}{7})$

$\|\varphi-\varphi^*\|_2 = \sqrt{(1-\frac{13}{7})^2 + (1-\frac{5}{7})^2 + (3-\frac{17}{7})^2} = \underline{\underline{1{,}069044968}}$

Př: Za účelem stanovení nadmořských výšek v_A, v_B, v_C bodů A, B, C bylo provedeno měření těchto šesti výšek, případně jejich rozdílů. Najděte co nejpřesnější aproximace nadmořských výšek v_A, v_B, v_C.

$$
\begin{aligned}
v_A \qquad\qquad &= 1\\
-v_A \qquad + v_C &= 1\\
v_B \qquad &= 2\\
-v_B + v_C &= 2\\
v_C &= 3\\
-v_A + v_B \qquad &= 1
\end{aligned}
\qquad
\varphi^A = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\quad
\varphi^B = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad
\varphi^C = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\quad
\varphi = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\3\\1\end{pmatrix}
$$

$\langle\varphi^A,\varphi^A\rangle = 3$, $\langle\varphi^A,\varphi^B\rangle = -1$, $\langle\varphi^A,\varphi^C\rangle = -1$, $\langle\varphi^A,\varphi\rangle = -1$

$\langle\varphi^B,\varphi^A\rangle = -1$, $\langle\varphi^B,\varphi^B\rangle = 3$, $\langle\varphi^B,\varphi^C\rangle = -1$, $\langle\varphi^B,\varphi\rangle = 1$

$\langle\varphi^C,\varphi^A\rangle = -1$, $\langle\varphi^C,\varphi^B\rangle = -1$, $\langle\varphi^C,\varphi^C\rangle = 3$, $\langle\varphi^C,\varphi\rangle = 6$

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 8 & -4 & 2\\ 0 & 4 & -4 & -5 \end{array}\right)
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -1 & 1\\ 0 & 4 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
-v_A + 3v_B - v_C &= 1 &\Rightarrow\quad & v_A = -1 + 3v_B - v_C = -1 + \tfrac{21}{4} - 3 = -4 + \tfrac{21}{4} = \tfrac{5}{4}\\
4v_B - 2v_C &= 1 &\Rightarrow\quad & v_B = \tfrac{1}{4}(1 + 2v_C) = \tfrac{1}{4}(1 + 2\cdot 3) = \tfrac{7}{4}\\
2v_C &= 6 &\Rightarrow\quad & v_C = 3
\end{aligned}
$$

$\underline{\underline{v_C = 3}}$, $\underline{\underline{v_B = \frac{7}{4} = 1{,}75}}$, $\underline{\underline{v_A = \frac{5}{4} = 1{,}25}}$