ITERAČNÍ METODY ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

- využíváme pro řešení systémů s řídkými maticemi, které nejsou symetrické

  řídká matice = většina prvků nulových

- $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{upravíme}} \begin{bmatrix} x_1^{(i+1)} \\ x_2^{(i+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ x_n^{(i)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- počáteční aproximace: obvykle nulový vektor

- aproximace kořenů konvergují k přesnému řešení, je-li matice A ryze diagonálně dominantní, tj:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \text{pro } i = 1, \ldots, n$$

- podmínka ukončení: $\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \|_2 < \varepsilon$

  euklidovská norma $\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \|_2 = \sqrt{(x_1^{(i+1)} - x_1^{(i)})^2 + (x_2^{(i+1)} - x_2^{(i)})^2 + \ldots + (x_n^{(i+1)} - x_n^{(i)})^2}$

JACOBIHO METODA

př: $2x_1 - x_2 = 1{,}5$, $\quad \varepsilon < 0{,}09$
$-0{,}5x_1 + 2x_2 = 2{,}5$ $\quad$ na 6 desetinných míst

Ověření, zda je matice ryze diagonálně dominantní: $|a_{11}| > |a_{12}|$, $|a_{22}| > |a_{21}|$
$|2| > |-1|$ ✓ $|2| > |-0{,}5|$ ✓

Z každého řádku vyjádříme x_i: $x_1 = \frac{1}{2} x_2 + \frac{1{,}5}{2} \Rightarrow x_1^{(i+1)} = \frac{1}{2} x_2^{(i)} + \frac{1{,}5}{2}$

$x_2 = \frac{0{,}5}{2} x_1 + \frac{2{,}5}{2} \Rightarrow x_2^{(i+1)} = \frac{0{,}5}{2} x_1^{(i)} + \frac{2{,}5}{2}$

i	$x_1^{(i+1)} = \frac{1{,}5 + x_2^{(i)}}{2}$	$x_2^{(i+1)} = \frac{2{,}5 + 0{,}5x_1^{(i)}}{2}$	$\| x^{(i+1)} - x^{(i)} \|_2$
0	0	0	0
1	0,75	1,25	1,457738
2	1,375	1,4375	0,652519
3	1,46875	1,59375	0,182217
4	1,546875	1,617188	0,081565 $< \varepsilon$

pro $i=1$: $\|x^{(1)}-x^{(0)}\| = \sqrt{(0,75-0)^2+(1,25-0)^2} = 1,457738 > \varepsilon$

pro $i=2$: $\|x^{(2)}-x^{(1)}\| = \sqrt{(1,375-0,75)^2+(1,4375-1,25)^2} = 0,652519 > \varepsilon$

⋮

$K = \{(1,546875;\ 1,617188)^T\}$

GAUSSOVA-SEIDELOVA METODA

Př: $2x_1 - x_2 = 1,5$
$-0,5x_1 + 2x_2 = 2,5$

$\varepsilon = 0,09$

$\Rightarrow\ x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1,5}{2} \ \Rightarrow\ x_1^{(i+1)} = \frac{1}{2}x_2^{(i)} + \frac{1,5}{2}$

$x_2 = \frac{0,5}{2}x_1 + \frac{2,5}{2} \ \Rightarrow\ x_2^{(i+1)} = \frac{0,5}{2}x_1^{(i+1)} + \frac{2,5}{2}$

i	$x_1^{(i+1)} = \frac{1,5+x_2^{(i)}}{2}$	$x_2^{(i+1)} = \frac{2,5+0,5x_1^{(i+1)}}{2}$	$\|x^{(i+1)}-x^{(i)}\|_2$
0	0	0	0
1	0,75	1,4375	1,62134
2	1,46875	1,617188	0,740871
3	1,558594	1,639649	0,092609
4	1,569824	1,642456	0,011575 $< \varepsilon$

$K = \{(1,569824;\ 1,642456)^T\}$

Př: $10x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1,5$
$x_1 + 12x_2 - 10x_3 = -2,5$
$x_1 + 5x_2 - 8x_3 = -6,5$

$\varepsilon < 0,5$ na 4 desetinná místa

a) J.M. b) G-S.M.

$x_1 = \frac{1}{10}(1,5 - 4x_2 + 5x_3)$

$x_2 = \frac{1}{12}(-2,5 - x_1 + 10x_3)$

$x_3 = -\frac{1}{8}(-6,5 - x_1 - 5x_2)$

Ověření postačující konvergence:
$|10| > |4| + |-5|$
$|12| > |1| + |-10|$
$|-8| > |1| + |5|$
$\Rightarrow A$ je ryze diagonálně dominantní
$\Rightarrow$ Obě metody konvergují

a) $x_1^{(i+1)} = \frac{1}{10}(1,5 - 4x_2^{(i)} + 5x_3^{(i)})$

$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{12}(-2,5 - x_1^{(i)} + 10x_3^{(i)})$

$x_3^{(i+1)} = -\frac{1}{8}(-6,5 - x_1^{(i)} - 5x_2^{(i)})$

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\|x^{(i+1)}-x^{(i)}\|_2$
0	0	0	0	
1	0,15	-0,2083	0,8125	0,8521
2	0,6396	0,4563	0,7011	0,833
3	0,318	0,3226	1,1776	0,5902
4	0,6098	0,7465	1,0539	0,5293
5	0,3784	0,6191	1,3553	0,4008 $< \varepsilon$

$K = \{(0{,}7384;\ 0{,}6191;\ 1{,}3553)^T\}$

b) $x_1^{(i+1)} = \frac{1}{10}(1{,}5 - 4x_2^{(i)} + 5x_3^{(i)})$

$x_2^{(i+1)} = \frac{1}{12}(-2{,}5 - x_1^{(i+1)} + 10x_3^{(i)})$

$x_3^{(i+1)} = -\frac{1}{7}(-6{,}5 - x_1^{(i+1)} - 5x_2^{(i+1)})$

i	$x_1^{(i+1)}$	$x_2^{(i+1)}$	$x_3^{(i+1)}$	$\lVert x^{(i+1)} - x^{(i)} \rVert_2$
0	0	0	0	
1	0,15	-0,2208	0,6933	0,7429
2	0,585	0,3207	1,0861	0,798
3	0,5648	0,6497	1,2892	0,3872 < ε

$K = \{(0{,}5648;\ 0{,}6497;\ 1{,}2892)^T\}$

Př: $3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2$
$-2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2$
$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3$

a) J.M., $\varepsilon < 0{,}3$
b) G-S.M., $\varepsilon < 0{,}09$
na 6 desetinných míst