NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ALGEBRAICKÝCH ROVNIC

LU-ROZKLAD MATICE

- čtvercová matice A (řádu 3)

1. krok: Vhodné násobky 1. řádku matice přičítáme k řádkům ležícím pod ním tak, abychom v 1. sloupci pod prvním řádkem dostali nuly.

2. krok: Vhodné násobky 2. řádku ... tak, abychom v 2. sloupci pod 2. řádkem dostali nuly.

$\}$ *

$\rightarrow$ $A = L \cdot U$, kde

- matice L je dolní trojúhelníková matice tvořená jedničkami na hlavní diagonále a všemi násobky (multiplikátory) použitými při úpravě matice A s opačným znaménkem.
- matice U je horní trojúhelníková matice – schodovitý tvar původní matice A.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & -m_{32} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{32}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{pmatrix}$$

* Postupným přičítáním m-násobků vhodného řádku ke všem řádkům pod ním převedeme matici A na schodovitý tvar.

Nesmíme zaměňovat řádky matice A, ani přičítat násobek nějakého řádku k řádku nad ním.

Př: Najděte LU-rozklad matice A a ověřte správnost výpočtu.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot(-2)\ \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot\left(-\tfrac{4}{7}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -\tfrac{20}{7} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \tfrac{4}{7} & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -\tfrac{20}{7} \end{pmatrix}$$

zk:

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & \tfrac{4}{7} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & -\tfrac{20}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 6-7 & -4+5 \\ 1 & 3-4 & -2+\tfrac{20}{7}-\tfrac{20}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = A$$

ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU-ROZKLADU

- soustava $A\cdot X = B$, A je regulární čtvercová matice

$\Rightarrow A = L\cdot U \quad \Rightarrow \quad L\cdot Y = B \quad \Rightarrow \quad U\cdot X = Y$

platí: $B = L\cdot Y = L\cdot(U\cdot X) = (L\cdot U)\cdot X = A\cdot X$

- efektivnější než GEM v situaci, že máme sérii výpočtů se stejnou maticí soustavy A a více vektory pravých stran $b^{(i)}$, kde $i=1,2,\dots$

Př: Řešte soustavy rovnic $AX^{(i)}=B^{(i)}$, $i=1,2$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\qquad a)\ B^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\qquad b)\ B^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&-2\\3&-1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{matrix}\cdot(-3)\ \cdot(-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-7&7\\0&-1&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \cdot(-\frac{1}{7})\\ \\ \end{matrix}\sim\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&-7&7\\0&0&3\end{pmatrix}}_{U}$$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&0\\1&\frac{1}{7}&1\end{pmatrix}$$

a) $L\cdot Y = B^{(1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\3&1&0&0\\1&\frac{1}{7}&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow y_1 = 1\\ \Rightarrow 3y_1+y_2=0 \Rightarrow y_2=-3y_1=-3\\ \Rightarrow y_1+\frac{1}{7}y_2+y_3=2 \Rightarrow y_3=2-y_1-\frac{1}{7}y_2=2-1+\frac{3}{7}=\frac{10}{7}\end{array}$$

$$\Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1\\-3\\\frac{10}{7}\end{pmatrix}$$

$U\cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&1\\0&-7&7&-3\\0&0&3&\frac{10}{7}\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow x_1+2x_2-2x_3=1 \Rightarrow x_1=1-2x_2+2x_3=1-\frac{38}{21}+\frac{20}{21}=\frac{1}{7}\\ \Rightarrow -7x_2+7x_3=-3 \Rightarrow x_2=-\frac{1}{7}(-3-7x_3)=-\frac{1}{7}(-3-\frac{10}{3})=\frac{19}{21}\\ \Rightarrow 3x_3=\frac{10}{7} \Rightarrow x_3=\frac{10}{21}\end{array}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}\frac{1}{7}\\\frac{19}{21}\\\frac{10}{21}\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad K=\left\{\left(\frac{1}{7},\frac{19}{21},\frac{10}{21}\right)\right\}$$

b) $L\cdot Y = B^{(2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\3&1&0&1\\1&\frac{1}{7}&1&2\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow y_1 = 0\\ \Rightarrow 3y_1+y_2=1 \Rightarrow y_2=1-3y_1=1\\ \Rightarrow y_1+\frac{1}{7}y_2+y_3=2 \Rightarrow y_3=2-y_1-\frac{1}{7}y_2=2-\frac{1}{7}=\frac{13}{7}\end{array}\quad\Rightarrow\quad Y=\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{13}{7}\end{pmatrix}$$

$U\cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-2&0\\0&-7&7&1\\0&0&3&\frac{13}{7}\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow x_1+2x_2-2x_3=0 \Rightarrow x_1=-2x_2+2x_3=\frac{1}{21}(-20+26)=\frac{2}{7}\\ \Rightarrow -7x_2+7x_3=1 \Rightarrow x_2=-\frac{1}{7}(1-7x_3)=-\frac{1}{7}(1-\frac{13}{3})=\frac{10}{21}\\ \Rightarrow 3x_3=\frac{13}{7} \Rightarrow x_3=\frac{13}{21}\end{array}\quad\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}\\\frac{10}{21}\\\frac{13}{21}\end{pmatrix}$$

$$K=\left\{\left(\frac{2}{7},\frac{10}{21},\frac{13}{21}\right)\right\}$$

Př: Najděte LU-rozklad matice A a řešení soustavy $A \cdot X = B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad m_{21} = -2$, $m_{31} = 1$, $m_{32} = 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) • $L \cdot Y = B^{(1)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow y_1 = 1 \\ \Rightarrow 2y_1 + y_2 = 2 \Rightarrow y_2 = 2 - 2y_1 = 2 - 2 = 0 \\ \Rightarrow -y_1 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = y_1 = 1 \end{array} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$U \cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1 + 2x_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ \Rightarrow 3x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = \frac{1}{3} \\ \Rightarrow -x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = -1 \end{array} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$K = \{(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -1)\}$

• $L \cdot Y = B^{(2)}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow y_1 = 0 \\ \Rightarrow 2y_1 + y_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 1 - 2y_1 = 1 \\ \Rightarrow -y_1 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 2 + y_1 = 2 \end{array} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$U \cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2 = 2 \\ \Rightarrow 3x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}(1 - x_3) = \frac{1}{3}(1+2) = 1 \\ \quad -x_3 = 2 \Rightarrow x_3 = -2 \end{array} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$K = \{(2, 1, -2)\}$

LU-ROZKLAD S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

- A je čtvercová matice řádu 3.

- Před převodem matice A na schodovitý tvar vybereme v prvním, resp. druhém sloupci prvek s největší absolutní hodnotou. Řádek, který tento prvek obsahuje, přesuneme na první, resp. druhé místo.

$\Rightarrow P \cdot A = L \cdot U$, kde P je permutační matice – vznikne z jednotkové matice E prohozením stejných řádků, jako u matice A

- slouží ke zmenšení zaokrouhlovacích chyb

Př:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} /\cdot(-\frac{1}{2}) \quad /\cdot\frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} /\cdot(-\tfrac{1}{3}) \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Vybereme prvek s největší absolutní hodnotou

musíme prohodit konstanty v matici L

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1.\,\text{krok}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2.\,\text{krok}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = P, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

zk:

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & -2+6 & 3 \\ 2 & 4+2 & 1+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ŘEŠENÍ SLAR POMOCÍ LU-ROZKLADU S ČÁSTEČNÝM VÝBĚREM HLAVNÍHO PRVKU

Př.:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\4&4&2\\4&6&4\end{pmatrix}\sim \qquad B^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\6\\10\end{pmatrix} \qquad B^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}4&4&2\\4&6&4\\1&2&2\end{pmatrix} /\cdot(-1) \;/\cdot\left(-\tfrac{1}{4}\right) \sim \begin{pmatrix}4&4&2\\0&2&2\\0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix} /\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{pmatrix}4&4&2\\0&2&2\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow P=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix},\quad U=\begin{pmatrix}4&4&2\\0&2&2\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$A\cdot X = B$$

$$P\cdot A\cdot X = P\cdot B \quad\Rightarrow\quad P\cdot A = A^*,\; P\cdot B = B^* \quad\Rightarrow\quad A^*\cdot X = B^*$$

$$B^{(1)*}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\6\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\10\\3\end{pmatrix},\qquad B^{(2)*}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

a) $L\cdot Y = B^{(1)*}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&6\\1&1&0&10\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&1&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow y_1 = 6\\ \Rightarrow y_1+y_2=10 \Rightarrow y_2 = 10-y_1 = 4\\ \Rightarrow \frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2}y_2+y_3=3 \Rightarrow y_3 = 3-\frac{1}{4}y_1-\frac{1}{2}y_2 = 3-\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}\end{array} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}6\\4\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$U\cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&4&2&6\\0&2&2&4\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow 4x_1+4x_2+2x_3=6 \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}(3-2x_2-x_3)=\frac{1}{2}(3-6+1)=-1\\ \Rightarrow 2x_2+2x_3=4 \Rightarrow x_2=2-x_3=3\\ \Rightarrow \frac{1}{2}x_3=-\frac{1}{2} \Rightarrow x_3=-1\end{array} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$K=\{(-1,3,-1)\}$

b) $L\cdot Y = B^{(2)*}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\1&1&0&2\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow y_1 = 1\\ \Rightarrow y_1+y_2=2 \Rightarrow y_2 = 2-y_1 = 1\\ \Rightarrow \frac{1}{4}y_1+\frac{1}{2}y_2+y_3=0 \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{4}y_1-\frac{1}{2}y_2 = -\frac{3}{4}\end{array} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix}1\\1\\-\frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

$U\cdot X = Y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}4&4&2&1\\0&2&2&1\\0&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)\begin{array}{l}\Rightarrow 4x_1+4x_2+2x_3=1 \Rightarrow x_1=\frac{1}{4}(1-4x_2-2x_3)=\frac{1}{4}(1-8+3)=-1\\ \Rightarrow 2x_2+2x_3=1 \Rightarrow x_2=\frac{1}{2}(1-2x_3)=2\\ \Rightarrow \frac{1}{2}x_3=-\frac{3}{4} \Rightarrow x_3=-\frac{3}{2}\end{array} \Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1\\2\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$K=\{(-1,2,-\frac{3}{2})\}$