NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

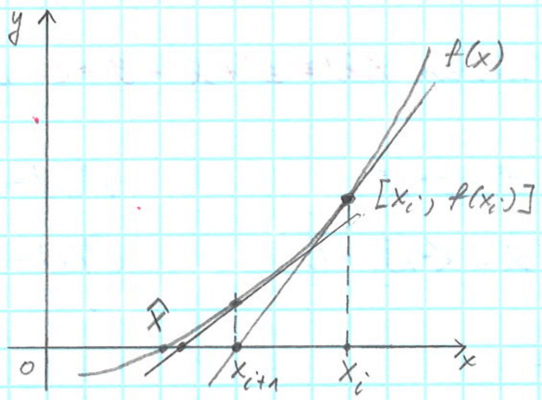
METODA TEČEN = NEWTONOVA METODA

- hledáme kořen $\hat{x}$ rce $f(x) = 0$
  předpokládáme, že aproximace x_i leží blízko $\hat{x} \in \langle a, b \rangle$

- za x_{i+1} volíme průsečík osy x s tečnou grafu $f(x)$ v bodě $[x_i, f(x_i)]$;

  tato tečna má rci: $y - f(x_i) = f'(x_i) \cdot (x - x_i)$

  a průsečík je: $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$



- aproximace NM se blíží k nule rychleji než aproximace bisekcí, za předpokladu, že chyba $\hat{x} - x_i$ je malá.

- konverguje lokálně (x_i je blízko řešení)
- potřebuje větší hladkost f ($\exists$ první derivace)
- v každém kroku potřebujeme $f(x_i)$ a $f'(x_i)$

- musí platit **Fourierovy podmínky**:
  a) f, f', f'' jsou spojité na $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$
  b) f', f'' nemění znaménko v $\langle a, b \rangle$ a $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \langle a, b \rangle$
  a) existuje kořen
  b) fce je ryze monotónní a buď konvexní nebo konkávní

- kořen $\hat{x} \in (a, b)$; jako počáteční aproximaci x_0 volíme:

  $x_0 = a$ když $f(a) \cdot f''(a) > 0$
  $x_0 = b$ když $f(b) \cdot f''(b) > 0$

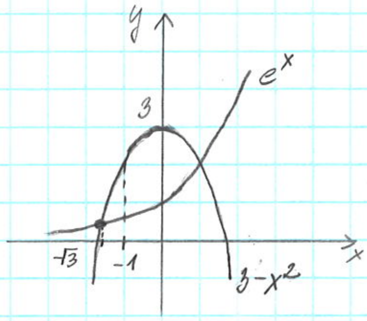
- výpočet ukončíme, když $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon$

Př: NM aproximujte kořen $\hat{x}$ rce $f(x) \equiv e^x - 2x - 2 = 0$, $x_0 = 1{,}5$

$f'(x) = e^x - 2$, $x_{i+1} = x_i - \dfrac{e^{x_i} - 2x_i - 2}{e^{x_i} - 2}$

i	x_i
0	1,5
1	1,708854097
2	1,679069171
3	1,678347406
4	1,678346999
5	1,678346999 $= \hat{x}$ s maximální možnou přesností

Př: NM najděte záporný kořen $f(x) \equiv e^x + x^2 - 3 = 0$ s přesností $\varepsilon = 0{,}01$.



$e^x = 3 - x^2$

$\hat{x} \in \langle -\sqrt{3}, -1 \rangle$

$f'(x) = e^x + 2x$

$f''(x) = e^x + 2$

Podmínky: a) f, f', f'' jsou spojité na $\langle -\sqrt{3}, -1 \rangle$
a $f(-\sqrt{3}) \cdot f(-1) = 0{,}176921 \cdot (-1{,}63212) < 0$ ✓

b) na $\langle -\sqrt{3}, -1 \rangle$: $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ ... nemění znaménko ✓

$$\left.\begin{array}{l} f(-\sqrt{3}) \cdot f''(-\sqrt{3}) > 0 \\ f(-1) \cdot f''(-1) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = -\sqrt{3}$$

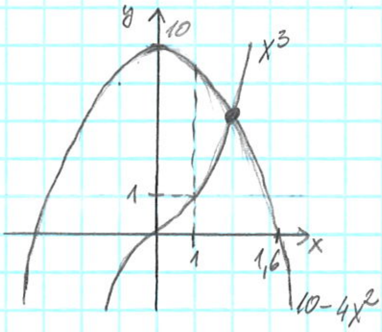
$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{x_i} + x_i^2 - 3}{e^{x_i} + 2x_i} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	$-\sqrt{3}$	0,176921	−3,287178
1	−1,678229		
2	−1,677233		

$|x_2 - x_1| = 0{,}000996 < 0{,}01$

$\underline{\underline{\hat{x} = -1{,}677233}}$

Př: NM najděte kladný kořen $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ s ~~maximální přesností~~ (s přesností $\varepsilon = 0{,}0005$



$x^3 = 10 - 4x^2$

$\hat{x} \in \langle 1; 1{,}6 \rangle$

Podmínky:

a) $f'(x) = 3x^2 + 8x$ spojité ✓
$f''(x) = 6x + 8$

$f(1) \cdot f(1{,}6) = -5 \cdot 4{,}336 < 0$ ✓

b) $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ na $\langle 1; 1{,}6 \rangle$
... nemění znaménko ✓

$$\left.\begin{array}{l} f(1) \cdot f''(1) = -5 \cdot 14 < 0 \\ f(1{,}6) \cdot f''(1{,}6) = 4{,}336 \cdot 17{,}6 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0 = 1{,}6$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^3 + 4x_i^2 - 10}{3x_i^2 + 8x_i}$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1,6	4,336	20,48
1	1,38828125	0,384968239	16,88822449
2	1,365486181		
3	1,365230046		
~~4~~	1,365230013		
~~5~~	1,365230013		

$|x_3 - x_2| = 0{,}000256135$

$\hat{x} = 1{,}36523$

$\hat{x} = x_3$

METODA SEČEN

- modifikace NM – náhrada tečny za sečnu

- za x_{i+1} volíme průsečík osy x se sečnou procházející body $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ a $[x_i, f(x_i)]$.

tato tečna má rci:
$$y - f(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \cdot (x - x_i)$$

a průsečík je:
$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})} \cdot f(x_i)$$

- v každém kroku stačí spočítat jen $f(x_i)$

- 2 startovací body: x_0 zvolíme
  x_1 spočítáme NM

Př: $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ najděte kořen s přesností $\varepsilon = 0{,}00003 = 3 \cdot 10^{-5}$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1,6	4,336
1	1,38828125	0,384968239
2	1,367652463	0,040050391
3	1,365257136	0,000447886
4	1,365230046	

$|x_4 - x_3| = 0{,}00002709 < 0{,}00003$

$\hat{x} = 1{,}365230046$

Př: Metodou sečen aproximujte kořen v $\langle 1{,}1; 1{,}2 \rangle$ fce $f(x) \equiv x - \sin x - 0{,}25$ s podmínkou ukončení $\varepsilon = 0{,}0001$

$f'(x) = 1 - \cos x$
$f''(x) = \sin x$

Podmínky: f, f', f'' spojité
$f(1{,}1) \cdot f(1{,}2) = -0{,}04121 \cdot 0{,}017961 < 0$
f', f'' nemění znaménko, $f'(x) \neq 0$

$$\left.\begin{aligned} f(1{,}1) \cdot f''(1{,}1) &= -0{,}04121 \cdot 0{,}89121 < 0 \\ f(1{,}2) \cdot f''(1{,}2) &= 0{,}017961 \cdot 0{,}93204 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_0 = 1{,}2$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$
0	1,2	0,0179609914	0,637642245
1	1,171832302	0,000368374	
2	1,171242493	0,000007845	
3	1,171229659		

$|x_3 - x_2| = 0{,}000012834 < 0{,}0001$

$\hat{x} = 1{,}171229659$