

NUMERICKÉ DERIVACE

- pro aproximaci derivace dané fce.
- používáme v případech, kdy je derivovaná fce zadána pouze tabulkou, nebo je výpočet přesné hodnoty derivace příliš pracný.
- funkci nahraďujeme Newtonovým interpolačním polynomem.
- hodnotu derivace počítáme v ústech s krokem h.

a) **Diference směrem dopředu** - pro krajní bod

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \dots \text{známe-li hodnoty v ústech } x \text{ a } x+h$$

b) **Diference směrem dozadu** - pro krajní bod

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \dots \text{známe-li hodnoty v ústech } x \text{ a } x-h$$

c) **Centrální diference** - pro vnitřní body

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \dots \text{známe-li hodnoty v ústech } x-h \text{ a } x+h$$

d) **Druhá centrální diference** - pro vnitřní body (nelze použít pro všechny ústy)

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad \dots \text{známe-li hodnoty v ústech } x-h, x \text{ a } x+h$$

Pr.: $f(x) = e^{2x} + 2x$, $h = 0,5$ + uvedte chyby

i	1	2	3
x_i	-0,5	0	0,5
$f(x_i)$	-0,63212	1	3,71828

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{1 - (-0,63212)}{0,5} = \underline{3,26424}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{3,71828 - (-0,63212)}{1} = \underline{4,3504}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{3,71828 - 1}{0,5} = \underline{5,43656}$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{3,71828 - 2 \cdot 1 + (-0,63212)}{0,25} = \underline{4,34464}$$

- Při numerickém derivování se dopouštíme chyby.

Hodnoty pro analytické derivování:

$$f'_*(x) = e^{2x} \cdot 2 + 2 = 2(e^{2x} + 1)$$

$$f''_*(x) = 2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 4e^{2x}$$

$$f'_*(x_1) = 2,73576$$

$$f'_*(x_2) = 4$$

$$f'_*(x_3) = 7,43656$$

$$f''_*(x_2) = 4$$

$$\text{Chyby: } |f'(x_1) - f'_*(x_1)| = |3,26424 - 2,73576| = 0,52848$$

$$|f'(x_2) - f'_*(x_2)| = |4,3504 - 4| = 0,3504$$

$$|f'(x_3) - f'_*(x_3)| = |5,43656 - 7,43656| = 2$$

$$|f''(x_2) - f''_*(x_2)| = |4,34464 - 4| = 0,34464$$

- největší chyby v krajních bodech

Pr: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $h = 0,25$

i	1	2	3	4
x_i	0	0,25	0,5	0,75
$f(x_i)$	1	0,968246	0,866025	0,661438

$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{0,968246 - 1}{0,25} = -0,127016$

$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{2h} = \frac{0,866025 - 0,968246}{0,5} = -0,20495$

$f'(x_3) = \frac{f(x_4) - f(x_2)}{2h} = \frac{0,661438 - 0,968246}{0,5} = -0,613616$

$f'(x_4) = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h} = \frac{0,661438 - 0,866025}{0,25} = -0,818348$

$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{0,866025 - 2 \cdot 0,968246 + 1}{0,0625} = -1,127472$

$f''(x_3) = \frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{h^2} = \frac{0,661438 - 2 \cdot 0,866025 + 0,968246}{0,0625} = -1,037956$

Pr: $f(x) = \sin 2x$, $h = 0,25$ *v radiánech!*

i	1	2	3
x_i	0,25	0,5	0,75
$f(x_i)$	0,479426	0,841471	0,997495

$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{0,841471 - 0,479426}{0,25} = 1,44218$

$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{0,997495 - 0,479426}{0,5} = 1,036138$

$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{0,997495 - 0,841471}{0,25} = 0,624096$

$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{0,997495 - 2 \cdot 0,841471 + 0,479426}{0,0625} = -3,290336$

Pr: Foe $f(x)$ je zadana tabulka; $h=1$.

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	0,2594	-3,412	-2,361	1,259

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{-3,412 - 0,2594}{1} = \underline{\underline{-3,6714}}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{-2,361 - 0,2594}{2} = \underline{\underline{-1,3094}}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_4) - f(x_2)}{2h} = \frac{1,259 + 3,412}{2} = \underline{\underline{2,335}}$$

$$f'(x_4) = \frac{f(x_4) - f(x_3)}{h} = \frac{1,259 + 2,361}{1} = \underline{\underline{3,619}}$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{-2,361 - 2 \cdot (-3,412) + 0,2594}{1} = \underline{\underline{4,7214}}$$

$$f''(x_3) = \frac{f(x_4) - 2f(x_3) + f(x_2)}{h^2} = \frac{1,259 - 2 \cdot (-2,361) + (-3,412)}{1} = \underline{\underline{2,568}}$$

Pr: Foe $f(x)$ je zadana tabulka; $h=0,5$

i	1	2	3
x_i	-0,5	0	0,5
$f(x_i)$	1,7596	2,34571	1,3592

$$f'(x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = \frac{2,34571 - 1,7596}{0,5} = \underline{\underline{1,17122}}$$

$$f'(x_2) = \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{1,3592 - 1,7596}{1} = \underline{\underline{-0,4004}}$$

$$f'(x_3) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = \frac{1,3592 - 2,34571}{0,5} = \underline{\underline{-1,97502}}$$

$$f''(x_2) = \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{1,3592 - 2 \cdot 2,34571 + 1,7596}{0,25} = \underline{\underline{-6,29448}}$$