INTERPOLAČNÍ POLYNOM

- Aproximace fce f jinou fcí F, která je určená konečným počtem parametrů → je lepší než f (např. pro výpočty hodnot)
- „Náhradní" fce F musí být k dané fci f „co nejblíže".
- Při interpolaci se této blízkosti dosahuje tím, že hodnoty fcí f a F se shodují v daných bodech $x_1, x_2, \dots, x_n$. – uzlové body ... vzniklé např. jako výsledky měření.

LAGRANGEŮV TVAR

$$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + \dots + y_n L_n(x), \text{ kde}$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})\cdot(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdot(x_i-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{n-1})\cdot(x_i-x_n)}, \text{ pro } i=1,2,\dots,n$$

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{pro } j=i \\ 0 & \text{pro } j\neq i \end{cases}$$

- velmi náročná konstrukce, složitější výpočet → používá se většinou jen v teoretických úvahách

Př: Najděte Lagrangeův interpolační polynom, který prochází body:

i	1	2	3
x_i	4	5	7
y_i	3	2	0

$$L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-5)(x-7)}{(4-5)(4-7)} = \frac{x^2-12x+35}{3}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-4)(x-7)}{(5-4)(5-7)} = \frac{x^2-11x+28}{-2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-4)(x-5)}{(7-4)(7-5)} = \frac{x^2-9x+20}{6}$$

$$L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) =$$

$$= 3\cdot\frac{x^2-12x+35}{3} + 2\cdot\frac{x^2-11x+28}{-2} + 0\cdot\frac{x^2-9x+20}{6} =$$

$$= x^2-12x+35-x^2+11x-28 = \underline{\underline{-x+7}}$$

NEWTONŮV TVAR

$$N(x) = y_1 + y_{21}\cdot(x-x_1) + y_{321}\cdot(x-x_1)(x-x_2) + y_{4321}\cdot(x-x_1)(x-x_2)\cdot(x-x_3) + \dots$$

$$\begin{array}{llll}
x_1\ y_1 & & & \\
 & y_{21} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} & & \\
x_2\ y_2 & & y_{321} = \dfrac{y_{32}-y_{21}}{x_3-x_1} & \\
 & y_{32} = \dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2} & & y_{4321} = \dfrac{y_{432}-y_{321}}{x_4-x_1} \\
x_3\ y_3 & & y_{432} = \dfrac{y_{43}-y_{32}}{x_4-x_2} & \\
 & y_{43} = \dfrac{y_4-y_3}{x_4-x_3} & & \\
x_4\ y_4 & & &
\end{array}$$

y_{21}, y_{321}, y_{4321} ... poměrné diference

Př: Najděte Newtonův interpolační polynom, který prochází body:

i	1	2	3
x_i	4	5	7
y_i	3	2	0

$$N(x) = y_1 + y_{21}\cdot(x-x_1) + y_{321}\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$$

i	x_i	y_i
1	4	3
2	5	2
3	7	0

$$y_{21} = \frac{2-3}{5-4} = -1$$

$$y_{32} = \frac{0-2}{7-5} = -1$$

$$y_{321} = \frac{-1-(-1)}{7-4} = 0$$

$$N(x) = 3 + (-1)\cdot(x-4) + 0\cdot(x-4)(x-5) = 3 - x + 4 = \underline{-x+7}$$

Výhoda oproti Lagrangeovu tvaru:

1) Jednodušší výpočty
2) Pokud přidáme další uzlový bod x_{n+1} různý od všech ostatních, dříve spočítané koeficienty se nezmění a stačí pouze jeden další dopočítat – Langrangeův tvar bychom museli sestrojovat celý znovu.

DÚ

Př: Najděte interpolační polynomy $L(x)$, $N(x)$.

i	1	2	3	4
x_i	0	1	3	4
y_i	2	6	0	-2

a) $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-1)\overbrace{(x-3)(x-4)}^{x^2-7x+12}}{(0-1)(0-3)(0-4)} = \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)} = \frac{x^3-7x^2+12x}{6}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-0)\overbrace{(x-1)(x-4)}^{x^2-5x+4}}{(3-0)(3-1)(3-4)} = \frac{x^3-5x^2+4x}{-6}$$

$$L_4(x) = \frac{(x-0)\overbrace{(x-1)(x-3)}^{x^2-4x+3}}{(4-0)(4-1)(4-3)} = \frac{x^3-4x^2+3x}{12}$$

$$L(x) = 2 \cdot \frac{x^3-8x^2+19x-12}{-12} + 6 \cdot \frac{x^3-7x^2+12x}{6} + 0 \cdot \frac{x^3-5x^2+4x}{-6} - 2 \cdot \frac{x^3-4x^2+3x}{12} =$$

$$= \frac{1}{6}\left(-x^3+8x^2-19x+12+6x^3-42x^2+72x-x^3+4x^2-3x\right) =$$

$$= \frac{1}{6}\left(4x^3-30x^2+50x+12\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^3-5x^2+\frac{25}{3}x+2}}$$

b)

i	x_i	y_i
1	0	2
2	1	6
3	3	0
4	4	-2

$y_{21} = \frac{6-2}{1-0} = 4$

$y_{32} = \frac{0-6}{3-1} = -3$

$y_{43} = \frac{-2-0}{4-3} = -2$

$y_{321} = \frac{-3-4}{3-0} = -\frac{7}{3}$

$y_{432} = \frac{-2-(-3)}{4-1} = \frac{1}{3}$

$y_{4321} = \frac{\frac{1}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)}{4-0} = \frac{2}{3}$

$$N(x) = 2 + 4\cdot(x-0) - \frac{7}{3}\cdot(x-0)(x-1) + \frac{2}{3}(x-0)\overbrace{(x-1)(x-3)}^{x^2-4x+3} =$$

$$= 2+4x-\frac{7}{3}x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}x^3-\frac{8}{3}x^2+2x = \underline{\underline{\frac{2}{3}x^3-5x^2+\frac{25}{3}x+2}}$$

DÚ

Př: Najděte interpolační polynomy $L(x)$, $N(x)$.

i	1	2	3
x_i	1	2	3
y_i	0	3	2

a) $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} = \frac{x^2-5x+6}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} = \frac{x^2-4x+3}{-1}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}$$

$$L(x) = 0 \cdot \frac{x^2-5x+6}{2} + 3 \cdot \frac{x^2-4x+3}{-1} + 2 \cdot \frac{x^2-3x+2}{2} =$$

$$= -3x^2 + 12x - 9 + x^2 - 3x + 2 = \underline{\underline{-2x^2+9x-7}}$$

b)

i	x_i	y_i
1	1	0
2	2	3
3	3	2

$$y_{21} = \frac{3-0}{2-1} = 3 \qquad y_{32} = \frac{2-3}{3-2} = -1$$

$$y_{321} = \frac{-1-3}{3-1} = -2$$

$$N(x) = 0 + 3\cdot(x-1) - 2\cdot\overbrace{(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2} = 3x - 3 - 2x^2 + 6x - 4 = \underline{\underline{-2x^2+9x-7}}$$

Př: Najděte interpolační polynomy $L(x)$, $N(x)$.

i	1	2	3	4
x_i	-1	0	1	2
y_i	-4	-1	0	5

a) $L(x) = y_1 \cdot L_1(x) + y_2 \cdot L_2(x) + y_3 \cdot L_3(x) + y_4 \cdot L_4(x)$

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = \frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_2(x) = \frac{\overbrace{(x+1)(x-1)}^{x^2-1}(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} = \frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{\overbrace{(x+1)(x-0)(x-2)}^{x^2-x-2}}{(1+1)(1-0)(1-2)} = \frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_4(x) = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x^3-x}{6}$$

$$L(x) = -\cancel{4}^{2} \cdot \frac{x^3-3x^2+2x}{-\cancel{6}_{3}} - 1 \cdot \frac{x^3-2x^2-x+2}{2} + 0 \cdot \frac{x^3-x^2-2x}{-2} + 5 \cdot \frac{x^3-x}{6} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{5}{6}x^3 - \frac{5}{6}x = x^3 - x^2 + x - 1$$

b)

i	x_i	y_i
1	-1	-4
2	0	-1
3	1	0
4	2	5

$$y_{21} = \frac{-1+4}{0+1} = 3 \qquad y_{321} = \frac{1-3}{1+1} = -1 \qquad y_{4321} = \frac{2+1}{2+1} = 1$$

$$y_{32} = \frac{0+1}{1-0} = 1 \qquad y_{432} = \frac{5-1}{2-0} = 2$$

$$y_{43} = \frac{5-0}{2-1} = 5$$

$$N(x) = -4 + 3 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x+1)(x-0) + 1 \cdot (x+1)(x-0)(x-1) =$$

$$= -4 + 3x + 3 - x^2 - x + x^3 - x = x^3 - x^2 + x - 1$$