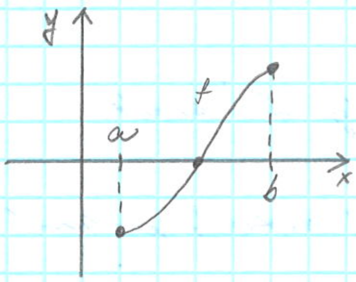
NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

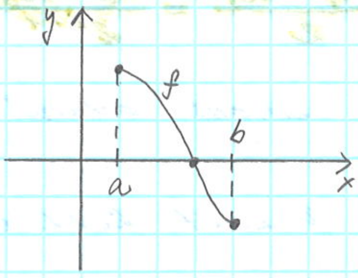
- hledáme kořen $\hat{x}$ rovnice $f(x) = 0$
  - pokud nelze vyjádřit přesně, musíme použít nějakou vhodnou numerickou metodu

Věta (Cauchy - Bolzano): Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a

$$f(a)\cdot f(b) < 0,$$

pak má f na (a, b) alespoň jeden kořen.





funkční hodnoty v bodech a, b mají opačná znaménka $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ graf fce protne někde uvnitř (a, b) osu x

Postup: 1, Určíme dostatečně malý výchozí interval (a_0, b_0), který obsahuje jediný kořen. (např. graficky)

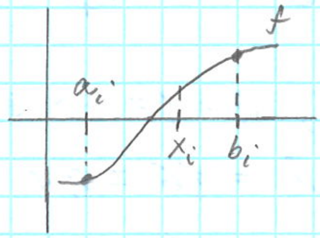
2, Postupně zmenšujeme výchozí interval
- v intervalu (a_i, b_i) vybereme $x_i \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1, $f(x_i) = 0$ ... x_i je kořen

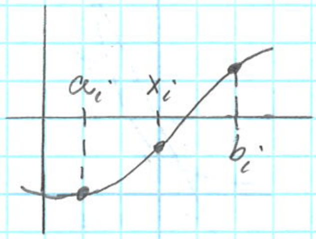
2, $f(a_i)\cdot f(x_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = a_i,\ b_{i+1} = x_i$

3, $f(x_i)\cdot f(b_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = x_i,\ b_{i+1} = b_i$

ad 2,

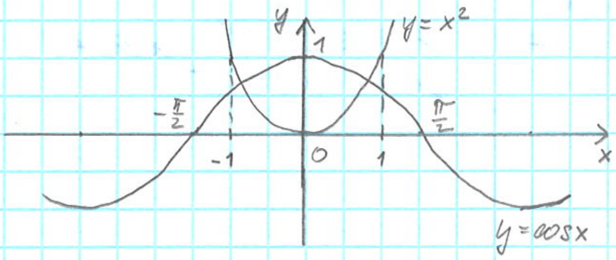


ad 3,



Př: Graficky odhadněte počet a polohu kořenů rovnice $\underbrace{x^2 - \cos x}_{f(x)} = 0$.

Rovnici upravíme na tvar: $x^2 = \cos x$



dva kořeny $\hat{x}_1, \hat{x}_2$

$\hat{x}_1 \in \langle -1, 0\rangle$, $\hat{x}_2 \in \langle 0, 1\rangle$

$(-1)^2 - \cos(-1) > 0$

$0^2 - \cos 0 < 0$

$1^2 - \cos 1 > 0$

METODA PŮLENÍ INTERVALU = BISEKCE

- za bod x_i bereme střed intervalu (a_i, b_i); $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$
- Podmínky ukončení: 1) $f(x_i) = 0$ => našli jsme kořen

  2) uživatelem zadaná malá hodnota ε => úloha vyřešena s chybou ε => pak kořen $\hat{x} = x_i \pm d_i$, kde $d_i < \varepsilon$
- Odhad chyby: $d_i = \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}}$

i kroků metody půlení zmenší odhad chyby 2^i-krát

Př: Odhad chyby zmenšit 10-krát. Kolik kroků metody půlení je k tomu potřeba?

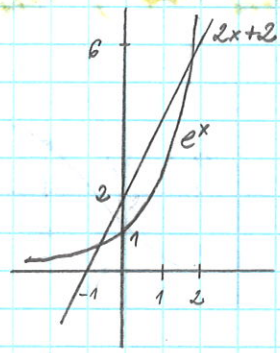
$$\left.\begin{array}{l} 10 \le 2^i \\ \underbrace{\log_2 10}_{\doteq 3,3} \le \log_2 2^i = i \end{array}\right\} \Rightarrow 10 \doteq 2^{3,3} \Rightarrow \text{zisk požadované chyby po 4 krocích}$$

Př: $f(x) \equiv e^x - 2x - 2 = 0$

a) Grafickou metodou odhadněte polohu a počet kořenů, najděte $\hat{x}$ v $(1,5;\ 1,7)$.

b) Kolik kroků metody půlení je potřeba pro aproximaci kořene $\hat{x}$ s chybou $< 0,005$.

a)



$e^x = 2x + 2 \Rightarrow \hat{x}_1 \in \langle -1, 0 \rangle, \quad \hat{x}_2 \in \langle 1, 2 \rangle$

$a_0 = 1,5,\ b_0 = 1,7 \rightarrow$ střed $x_0 = 1,6$

kořen $\hat{x} = 1,6 \pm 0,1$

$d_0 = (b_0 - a_0)/2 = (1,7 - 1,5)/2 = 0,1$

b) Hledáme index i tak, aby $d_i = (b_0 - a_0)/2^{i+1} \le 0,005$

$$\begin{aligned} (1,7 - 1,5)/2^{i+1} &\le 0,005 \\ 0,2/0,005 &\le 2^{i+1} \\ 40 &\le 2 \cdot 2^i \\ 20 &\le 2^i \\ \underbrace{\log_2 20}_{\doteq 4,3} &\le i \end{aligned}$$

$\Rightarrow 40 \le 2^{i+1}$ platí pro $i \ge 5$

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	1,5	$-0,518<0$	1,7	$0,074>0$	1,6	$-0,245<0$
1	1,6	$-0,247<0$	1,7	$0,074>0$	1,65	$-0,093<0$
2	1,65	$-0,093<0$	1,7	$0,074>0$	1,675	$-0,011<0$
3	1,675	$-0,011<0$	1,7	$0,074>0$	1,6875	$0,031>0$
4	1,675	$-0,011<0$	1,6875	$0,031>0$	1,68125	$0,0098>0$
5	1,675	$-0,011<0$	1,68125	$0,0098>0$	1,678125	

$$d_5 = \frac{b_0 - a_0}{2^6} = \frac{0,2}{2^6} = 0,003125$$

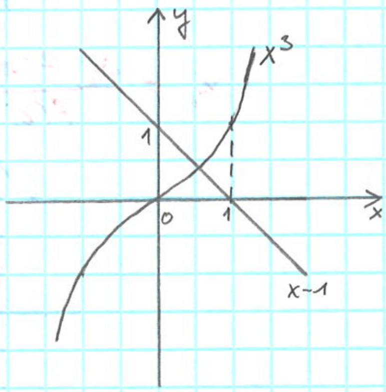
$$\hat{x} = x_5 \pm d_5 = 1,678125 \pm 0,003125$$

Př: $f(x) = x^3 + x - 1 = 0$

Graficky určete polohu kořene a určete ho s přesností 0,03.

$x^3 = 1 - x$, $a_0 = 0$, $b_0 = 1$

$x_0 = 0,5$, $d_0 = 0,5$



$$d_i = \frac{1-0}{2^{i+1}} \leq 0,03$$

$$\frac{1}{0,03} \leq 2 \cdot 2^i$$

$$\frac{1}{0,03 \cdot 2} \leq 2^i \quad \Rightarrow \quad i \geq \log_2 \frac{1}{2 \cdot 0,03} \doteq 4,06$$

$\Rightarrow i = 5$

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	0	$-1<0$	1	$1>0$	0,5	$-0,375<0$
1	0,5	$-0,375<0$	1	$1>0$	0,75	$0,172>0$
2	0,5	$-0,375<0$	0,75	$0,172>0$	0,625	$-0,131<0$
3	0,625	$-0,131<0$	0,75	$0,172>0$	0,6875	$0,012>0$
4	0,625	$-0,131<0$	0,6875	$0,012>0$	0,65625	$-0,061<0$
5	0,65625	$-0,061<0$	0,6875	$0,012>0$	0,671875	

$$d_5 = \frac{1-0}{2^6} = 0,015625$$

$$\hat{x} = 0,671875 \pm 0,015625$$

METODA TĚTIV = REGULA FALSI

- bod x_i z intervalu $(a_i; b_i)$ je průsečík přímky procházející body $[a_i; f(a_i)]$, $[b_i; f(b_i)]$ s osou x.

→ tětiva grafu $f(x)$ procházející body $A[a_i, f(a_i)]$ a $B[b_i, f(b_i)]$

směrový vektor $\vec{AB} = (b_i - a_i, f(b_i) - f(a_i))$

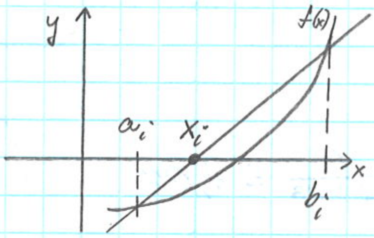
parametrické vyjádření: $x = a_i + t \cdot (b_i - a_i)$
$y = f(a_i) + t \cdot (f(b_i) - f(a_i))$

průsečík s osou x je bod $[x_i, 0]$:

$$x_i = a_i + t \cdot (b_i - a_i)$$
$$0 = f(a_i) + t \cdot (f(b_i) - f(a_i)) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

$$x_i = a_i + \frac{-f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)} \cdot (b_i - a_i) = \frac{a_i \cdot f(b_i) - a_i \cdot f(a_i) - b_i \cdot f(a_i) + a_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

$$x_i = \frac{a_i \cdot f(b_i) - b_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$



- Podmínka ukončení: $|f(x_i)| < \delta$, $\delta > 0$

Př: $f(x) \equiv e^x - 2x - 2 = 0$
s chybou menší než $\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ z intervalu $(1{,}5; 1{,}7)$

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	1,5	$-0{,}5183 < 0$	1,7	$0{,}074 > 0$	1,675	$-0{,}0111 < 0$
1	1,675	$-0{,}0111 < 0$	1,7	$0{,}074 > 0$	1,6783	$-0{,}00019$? $-0{,}0000976$

$\delta = 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}0005$

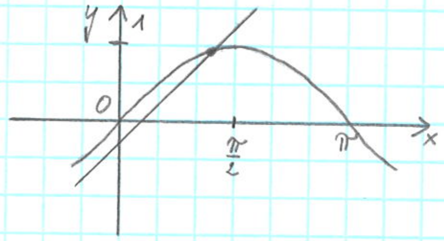
$|-0{,}00019| < 0{,}0005$

$\hat{x} = 1{,}6783$

Př: $f(x) \equiv x - \sin x - 0{,}25 = 0$

grafický odhad; hledat na $(1{,}1; 1{,}2)$ s chybou $\delta = 0{,}00001$
kalkulačka radiány! zaokrouhlovat na 6, chyba na 7

$\sin x = x - 0{,}25$



i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	1,1	−0,041207	1,2	0,017961	1,169644	−0,0009676
1	1,169644	−0,0009678	1,2	0,017961	1,171196	−0,0000207
2	1,171196	−0,0000207	1,2	0,017961	1,171229	−0,0000004

$\hat{x} = 1{,}171229$

Př: $f(x) \equiv x^3 + 4x^2 - 10 = 0$

pro chybu $\delta = 0{,}008$ na $(1; 2)$

i	a_i	$f(a_i)$	b_i	$f(b_i)$	x_i	$f(x_i)$
0	1	−5	2	14	1,2632	−1,6023 ? −1,6046
1	1,2632	−1,6023	2	14	1,3379	−0,4297
2	1,3379	−0,4297	2	14	1,3586	−0,1093
3	1,3586	−0,1093	2	14	1,3636	−0,0274
4	1,3636	−0,0274	2	14	1,3648	−0,0064

$\hat{x} = 1{,}3648$