NEZÁVISLOST KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU NA INTEGRAČNÍ CESTĚ

- Integrál $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$ nezávisí na integrační cestě $\Leftrightarrow$

$$P_y = Q_x .$$

Pro jeho potenciál $V(x,y)$ platí:

$$V_x = P, \quad V_y = Q .$$

Pak platí:

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy = V(B) - V(A).$$

*

* Pokud integrál nezávisí na integrační cestě, můžeme integrovat přes libovolnou křivku, která začíná v bodě A a končí v bodě B. (Nemusíme tedy znát křivku γ, stačí znát jen její počáteční a koncový bod.)

Pozn.: P je fce $P(x,y)$ $\quad$ P_y, Q_x, V_x, V_y jsou parciální derivace
Q je fce $Q(x,y)$

- Integrál $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ nezávisí na integrační cestě $\Leftrightarrow$

$$R_y = Q_z, \quad P_z = R_x, \quad Q_x = P_y .$$

Pro jeho potenciál $V(x,y,z)$ platí:

$$V_x = P, \quad V_y = Q, \quad V_z = R .$$

Pak platí:

$$\int_A^B P\,dx + Q\,dy + R\,dz = V(B) - V(A).$$

Pozn.: P je fce $P(x,y,z)$
Q je fce $Q(x,y,z)$
R je fce $R(x,y,z)$

Postup při výpočtu potenciálu – viz příklady

Př.: Ověřte, že daný integrál nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jeho hodnotu od bodu A do bodu B.

1) $\int_{c} \underbrace{(3x^2+6xy^2)}_{P}dx + \underbrace{(6x^2y+4y^3)}_{Q}dy$; $A[-1,0]$, $B[2,1]$

1. $P(x,y) = 3x^2+6xy^2 \Rightarrow P_y = 0+12xy$
$Q(x,y) = 6x^2y+4y^3 \Rightarrow Q_x = 12xy+0$
$\Rightarrow P_y = Q_x \Rightarrow$ Integrál je nezávislý na integrační cestě.

2. Výpočet potenciálu:

I. zp.: $V_x = P \Rightarrow V(x,y) = \int P(x,y)dx = \int(3x^2+6xy^2)dx = x^3+3x^2y^2+h(y)$

Integrujeme podle x a na y se díváme jako na konstantu.
(Funkce h(y) je tedy také konstanta.)

$V_y = Q \Rightarrow [x^3+3x^2y^2+h(y)]'_y = Q(x,y)$
$0+6x^2y+h'(y) = 6x^2y+4y^3$ -> vyjádříme $h'(y)$ ->
-> $\underbrace{h'(y) = 4y^3}$ ... všechny výrazy s x se musí odečíst a zbyde jen výraz s y.
$\Downarrow$
$h(y) = \int 4y^3dy = y^4+c$

II. zp.: $V_y = Q \Rightarrow V(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int(6x^2y+4y^3)dy = 3x^2y^2+y^4+g(x)$

Integrujeme podle y a na x se díváme jako na konstantu.
(Funkce g(x) je tedy také konstanta.)

$V_x = P \Rightarrow [3x^2y^2+y^4+g(x)]'_x = P(x,y)$
$6xy^2+0+g'(x) = 3x^2+6xy^2$ -> vyjádříme $g'(x)$
-> $\underbrace{g'(x) = 3x^2}$ ... všechny výrazy s y se musí odečíst a zbyde jen výraz s x.
$\Downarrow$
$g(x) = \int 3x^2dx = x^3+c$

Potenciál:
$V(x,y) = x^3+3x^2y^2+y^4+c$ (Vyjde oběma způsoby stejně.)

3. $\int_A^B (3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy = [x^3+3x^2y^2+y^4]_{[-1,0]}^{[2,1]} =$

$= \underbrace{2^3+3\cdot 2^2\cdot 1^2+1^4}_{V(B)} - (\underbrace{(-1)^3+3(-1)^2\cdot 0^2+0^4}_{V(A)}) = 8+12+1+1 = \underline{\underline{22}}$

Z předchozího příkladu vidíme, že při výpočtu potenciálu musíme využít obě podmínky $V_x = P$, $V_y = Q$, ale je jedno, v jakém pořadí. Postup volíme podle náročnosti výpočtu.

Obdobně u integrálu přes prostorovou křivku – pro výpočet potenciálu musíme využít všechny tři podmínky $V_x = P$, $V_y = Q$, $V_z = R$, ale je jedno, v jakém pořadí (celkem šest možností).

V dalších příkladech uvedeme jen jeden způsob výpočtu potenciálu.

2) $\displaystyle\int_{c} \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,dx + \frac{2y}{1+x}\,dy$; $A[0,0]$, $B[1,1]$

1. $P(x,y) = \dfrac{1-y^2}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot(1-y^2) \Rightarrow P_y = \dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot(-2y) = -\dfrac{2y}{(1+x)^2}$

$Q(x,y) = \dfrac{2y}{1+x} = 2y(1+x)^{-1} \Rightarrow Q_x = 2y\cdot(-1)(1+x)^{-2} = -\dfrac{2y}{(1+x)^2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P_y = Q_x \Rightarrow$ Integrál je nezávislý na integrační cestě.

2. $V_y = Q \Rightarrow V(x,y) = \int Q(x,y)\,dy = \int \dfrac{2y}{1+x}\,dy = \dfrac{y^2}{1+x} + g(x)$

$V_x = P \Rightarrow \left[\dfrac{y^2}{1+x} + g(x)\right]'_x = P(x,y)$ $\qquad \left[\dfrac{y^2}{1+x}\right]' = \left[y^2\cdot(1+x)^{-1}\right]' = -y^2(1+x)^{-2}$

$-\dfrac{y^2}{(1+x)^2} + g'(x) = \dfrac{1-y^2}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2} - \dfrac{y^2}{(1+x)^2}$

$g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$

$\Downarrow$

$g(x) = \int \dfrac{1}{(1+x)^2}\,dx = \int (1+x)^{-2}\,dx = \dfrac{(1+x)^{-1}}{-1} + c = -\dfrac{1}{1+x} + c$

$V(x,y) = \dfrac{y^2}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} + c = \dfrac{y^2-1}{x+1} + c$

3. $\displaystyle\int_A^B \frac{1-y^2}{(1+x)^2}\,dx + \frac{2y}{1+x}\,dy = \left[\frac{y^2-1}{x+1}\right]_{[0,0]}^{[1,1]} = \frac{1^2-1}{1+1} - \frac{0^2-1}{0+1} = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

3) $\int\limits_{\Gamma} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$; A[-2,-6], B[1,0]

1. $P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow P_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow Q_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$
$\Rightarrow P_y = Q_x \Rightarrow$ Integrál je nezávislý na integrační cestě.

2. $V_x = P \Rightarrow V(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y)$

$V_y = Q \Rightarrow \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y)\right]'_y = Q(x,y)$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y + h'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{y}{x^2+y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$h'(y) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$h(y) = \int 0\,dy = c$$

$V(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + c$

3. $\int\limits_A^B \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right]_{[-2,-6]}^{[1,0]} = \frac{1}{2}\ln(1^2+0^2) - \frac{1}{2}\ln((-2)^2+(-6)^2) =$

$= \frac{1}{2}\underbrace{\ln 1}_{0} - \frac{1}{2}\ln(4+36) = -\frac{1}{2}\ln 40$

4) $\int_{k} xz^2dx + y^3dy + x^2z\,dz$; $A[-1,1,2]$, $B[-4,2,-1]$

1. $P(x,y,z) = xz^2 \Rightarrow P_y = 0,\ P_z = 2xy$
$Q(x,y,z) = y^3 \Rightarrow Q_x = 0,\ Q_z = 0$
$R(x,y,z) = x^2z \Rightarrow R_x = 2xy,\ R_y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} P_y = 0,\ P_z = 2xy \\ Q_x = 0,\ Q_z = 0 \\ R_x = 2xy,\ R_y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_y = Q_x \\ R_x = P_z \\ Q_z = R_y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Integrál je nezávislý na integrační cestě.

2. $V_z = R \Rightarrow V(x,y,z) = \int R(x,y,z)dz = \int x^2z\,dz = \frac{1}{2}x^2z^2 + h(x,y)$

$V_y = Q \Rightarrow [\frac{1}{2}x^2z^2 + h(x,y)]'_y = Q(x,y,z)$

$$0 + h'_y(x,y) = y^3$$
$$\Downarrow$$
$$h(x,y) = \int y^3dy = \frac{1}{4}y^4 + g(x)$$

$V_x = P \Rightarrow [\frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + g(x)]'_x = P(x,y,z)$

$$xz^2 + 0 + g'(x) = xz^2$$
$$g'(x) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$g(x) = \int 0\,dx = c$$

$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4 + c$

3. $\int_A^B xz^2dx + y^3dy + x^2z\,dz = \left[\frac{1}{2}x^2z^2 + \frac{1}{4}y^4\right]_{[-1,1,2]}^{[-4,2,-1]} =$

$= \frac{1}{2}(-4)^2\cdot(-1)^2 + \frac{1}{4}\cdot 2^4 - \frac{1}{2}(-1)^2\cdot 2^2 - \frac{1}{4}\cdot 1^4 = 8 + 4 - 2 - \frac{1}{4} =$

$= 10 - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{39}{4}}}$

5) $\int\limits_{\gamma} x\,dx + y^2 dy - z^3 dz$; $A[1, 1, 1]$, $B[1, 1, -1]$

1. $P(x,y,z) = x \Rightarrow P_y = 0, \quad P_z = 0$
$Q(x,y,z) = y^2 \Rightarrow Q_x = 0, \quad Q_z = 0$
$R(x,y,z) = -z^3 \Rightarrow R_x = 0, \quad R_y = 0$

$$\left.\begin{matrix} P_y = 0, & P_z = 0 \\ Q_x = 0, & Q_z = 0 \\ R_x = 0, & R_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P_y = Q_x \\ R_x = P_z \\ Q_z = R_y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Integrál je nezávislý na integrační cestě.

2. $V_x = P \Rightarrow V(x,y,z) = \int P(x,y,z)dx = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + h(y,z)$

$V_y = Q \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 + h(y,z)\right]'_y = Q(x,y,z)$
$$0 + h'_y(y,z) = y^2$$
$$\Downarrow$$
$$h(y,z) = \int y^2 dy = \frac{1}{3}y^3 + g(z)$$

$V_z = R \Rightarrow \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 + g(z)\right]'_z = R(x,y,z)$
$$0 + 0 + g'_z(z) = -z^3$$
$$\Downarrow$$
$$g(z) = \int(-z^3)dz = -\frac{1}{4}z^4 + c$$

$V(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 + c$

3. $\int\limits_A^B x\,dx + y^2 dy - z^3 dz = \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4\right]_{[1,1,1]}^{[1,1,-1]} =$

$= \frac{1}{2}\cdot 1^2 + \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 + \frac{1}{4}\cdot 1^4 =$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{0}}$