

MATICE

POJEM MATICE, SPECIÁLNÍ TŘÍDY MATIC

Definice: Matice typu (m, n) , kde $m, n \in \mathbb{N}$, je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců. Matici typu (m, n) zapisujeme takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \dots$ prvky matice

a_{ij} ... prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci

- $i \dots$ řádkový index

- $j \dots$ sloupcový index

Stručný zápis: $A = (a_{ij})$, $A = (a_{ij})_m^n$

$m \neq n \dots$ obdélníková matice

$m = n \dots$ čtvercová matice n -tého řádu

- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \dots$ hlavní diagonála *

- $a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1} \dots$ vedlejší diagonála *



Řádková matice (řádkový vektor) - matice typu $(1, n)$ $(1 \ 2 \ 3)$

Sloupcová matice (sloupcový vektor) - matice typu $(n, 1)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Diagonální matice - čtvercová řádu n

- všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové

$$\begin{aligned} \text{tj. } a_{ij} &\neq 0 \dots i=j \\ a_{ij} &= 0 \dots i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

čtvercová matice

Jednotková matice - diagonální matice, kde $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$

ČTVERCOVÁ!

$$\text{tj. } a_{ij} = 1 \dots i=j$$

$$a_{ij} = 0 \dots i \neq j$$

- značíme E

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dolní trojúhelníková matice - všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové

$$\text{tj. } a_{ij} = 0 \dots j > i$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Horní trojúhelníková matice - všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové

$$\text{tj. } a_{ij} = 0 \dots i > j$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Symetrická matice - $a_{ij} = a_{ji}$
(prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Antisymetrická matice - $a_{ij} = -a_{ji}$ pro $i \neq j$
 $a_{ij} = 0$ pro $i = j$ - prvky hl. diagonály

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Nulová matice - všechny prvky rovný nule; $a_{ij} = 0$
- značíme 0
- typu (m, n) ; tj. obdélníková i čtvercová

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

OPERACE S MATICEMI

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij})$$

1, **Rovnost matic**: $A = B \Leftrightarrow$ 1. jsou stejného typu
 $(m, n) \quad (m, n)$ 2. $a_{ij} = b_{ij}$

2, **Součet matic**: $A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$
 $(m, n) \quad (m, n) \quad (m, n)$ sčítáme prvky na stejných místech
 A, B téhož typu $(m, n) \Rightarrow C$ typu (m, n)

Pr: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

3, **Násobení matice číslem k** = k -násobek matice: $k \cdot A = C \Leftrightarrow k \cdot a_{ij} = c_{ij}$
 $(m, n) \quad (m, n)$

- A, C téhož typu
- číslem k násobíme všechny prvky matice A

Pr: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad k = 2 \rightarrow 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$

- lze i obráceně - vytknutí společného činitele všech prvků

Pr: $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

4) Rozdíel matic: $A - B = A + (-B)$, A, B téhož typu
kde $-B = (-1) \cdot B$... **opačná matice k matici B**

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

Platí: A, B, C, O - matice téhož typu; $k, l \in \mathbb{R}$:

1. $A + B = B + A$ (komutativní zákon)
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativní zákon)
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $k \cdot (l \cdot A) = (k \cdot l) \cdot A$ (asociativní zákon pro násobení číslem)
7. $(k + l) \cdot A = k \cdot A + l \cdot A$ (1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)
8. $k(A + B) = k \cdot A + k \cdot B$ (2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)

5) Součin matic: $A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$
 $(m, n) \quad (n, p) \quad (m, p)$

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = C$... $C = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 7 & 16 \\ 0 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
 $(2, 3) \quad (3, 4) \quad (2, 4)$

$B \cdot A$ nelze!

- $A \cdot B = B \cdot A$ obecně NEplatí
tj. součin matic není komutativní

Definice: Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **záměnitelné** (komutativní), jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí: A, O, E - čtvercové matice řádu n :

1. $A \cdot O = O \cdot A = O$
2. $A \cdot E = E \cdot A = A$

- Platí: 1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (asociativní zákon)
2. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$ (asociativní zákon pro násobení
skalární matice číslem)
3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (1. distributivní zákon)
4. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$ (2. distributivní zákon)

6) Mocnina matice: $A^2 = A \cdot A$, $A^0 = E$
 $A^3 = A \cdot A \cdot A$
 $\vdots$

7) Transponovaná matice: $A \rightarrow A^T \dots a_{ij}^T = a_{ji}$
 $(m,n) \quad (n,m)$

- A^T ... transponovaná matice k matici A
- výměna řádků za sloupce

Pr: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

- Platí: 1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

- Poznámka: 1) Je-li A čtvercová matice, pak
- $A + A^T$ je symetrická matice
 - $A - A^T$ je antisymetrická matice

- 2) Každou čtvercovou matici můžeme rozložit
na součet symetrické a antisymetrické matice

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Pr: Rozlozte A na součet symetrické a antisymetrické matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad A - A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 4 \end{pmatrix}}_{\text{symetrická}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymetrická}}$$

HODNOST MATICE

Definice: Hodnost matice A je číslo udávající maximální počet lineárně nezávislých řádkových vektorů matice A . Značíme $h(A)$.

$$h(A) = \underset{\text{--}}{\text{maximální počet lineárně nezávislých řádků}} \underset{\text{--}}{\text{--}} \underset{\text{--}}{\text{stoupců}}$$

$$0 \leq h(A) \leq \min \{m, n\}$$

$$h(0) = 0$$

$$h(A^T) = h(A)$$

Elementární úpravy matice:

1. Výměna řádků (stoupců).
2. Vynásobení řádku (stoupce) číslem $k \neq 0$.
3. Přičtení k -násobku jednoho řádku (stoupce) k -násobku jiného řádku (stoupce).

Věta: Elementární úpravy nemění hodnotu matice.

Každou nenulovou matici lze pomocí elementárních úprav převést na schodovitou matici:

↳ „každý řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí“

$$h(A) = \text{počet nenulových řádků}$$

pr: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow h(A) = 3$

Definice: Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $h(A) = n$,
- **singulární**, jestliže $h(A) < n$.

$\rightarrow n - h(A) \dots$ **defekt** (nulita) matice A .

Pr: Určete $h(A)$:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot 5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dots \underline{h(A) = 2}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-4)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \dots \underline{h(A) = 3} \Rightarrow A \text{ je regulární}$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dots \underline{h(A) = 3} \Rightarrow A \text{ je singulární}$
defekt: $n - h(A) = 4 - 3 = \underline{1}$