LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

POSLOUPNOST A JEJÍ LIMITA

Definice: Posloupnost reálných čísel je funkce $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
Funkční hodnotu $f(n)$ značíme a_n (n-tý člen posloupnosti).
Posloupnost značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty}$; $(a_n)_1^{\infty}$; (a_n), $n \in \mathbb{N}$.

1, (a_n) je shora ohraničená – $\exists k \in \mathbb{R};\ a_n \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$

2, (a_n) je zdola ohraničená – $\exists h \in \mathbb{R};\ a_n \geq h \ \forall n \in \mathbb{N}$

3, (a_n) je ohraničená – $\exists h, k \in \mathbb{R};\ h \leq a_n \leq k \ \forall n \in \mathbb{N}$

4, (a_n) je rostoucí – $a_n < a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

5, (a_n) je klesající – $a_n > a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ (a_n) je ryze monotónní

6, (a_n) je neklesající – $a_n \leq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

7, (a_n) je nerostoucí – $a_n \geq a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

→ (a_n) je monotónní

8, (a_n) je stacionární – $a_n = a_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

9, (a_n) je aritmetická – $a_n = a_1 + (n-1)d$, $d \in \mathbb{R}$ … diference … $\forall n \in \mathbb{N}$

10, (a_n) je geometrická – $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, $q \in \mathbb{R}$ … qvocient … $\forall n \in \mathbb{N}$

Př: Zjistěte, zda posloupnost $(a_n) = 5n^2 - 3n$ je rostoucí.

$a_{n+1} = 5(n+1)^2 - 3(n+1) = 5n^2 + 10n + 5 - 3n - 3 = \underbrace{5n^2 - 3n}_{a_n} + \underbrace{10n + 2}_{>0}$

$a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ posloupnost je rostoucí

Definice: Posloupnost (a_n) má limitu $a \in \mathbb{R}$, jestliže ke každému $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $|a_n - a| < \varepsilon$.
Posloupnost (a_n) má limitu ∞ (resp. $-\infty$), jestliže ke každému $h \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí $a_n > h$ (resp. $a_n < h$).

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n > h$, resp. $a_n < h$

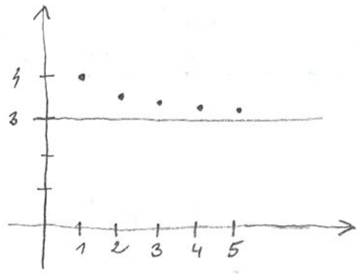
Posloupnost je **konvergentní** $\Leftrightarrow \lim a_n = a \in \mathbb{R}$ … má vlastní limitu
divergentní $\Leftrightarrow \lim a_n = \pm\infty$ … má nevlastní limitu
oscilující $\Leftrightarrow$ nemá limitu

Př: $a_n = \frac{3n+1}{n}$

$a_1 = 4$
$a_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$
$a_4 = \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4}$
$a_n = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

např. pro $\varepsilon = \frac{1}{4} \to n_0 = 5$



Definice: Je-li (a_n) posloupnost a (k_n) rostoucí posloupnost přirozených čísel, pak posloupnost (a_{k_n}) se nazývá **vybraná posloupnost** z posloupnosti (a_n).

1. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
2. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pak pro každou vybranou posloupnost (a_{k_n}) z posloupnosti (a_n) platí $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$.
3. Monotónní posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je ohraničená.
4. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ a $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > k_0 \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq b_n$, pak také $a \leq b$.
5. Změníme-li v posloupnosti konečný počet členů, pak se její limita nezmění.
6. Je-li (b_n) ohraničená posloupnost a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$
7. Je-li $a_n > 0$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

Platí: $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$, $a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \lim (a_n \pm b_n) = a \pm b & \lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \\ \lim (a_n \cdot b_n) = a \cdot b & \lim |a_n| = |a| \end{array}}$$

Definované operace:
- $\infty + \infty = \infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $k \pm \infty = \pm\infty$
- $\infty \cdot \infty = \infty$, $\infty \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$
- $k \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ pro $k > 0$
  $k \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$ pro $k < 0$
- $\frac{k}{\pm\infty} = 0$
- $k^\infty = 0$ pro $0 < k < 1$
  $k^\infty = \infty$ pro $k > 1$
  $\infty^\infty = \infty$

Neurčité výrazy: (nejsou def.)
- $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$
- $0 \cdot (\pm\infty)$
- $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$
- $\frac{k}{0}$, $\frac{\pm\infty}{0}$
- $(\pm\infty)^0$, 0^0
- 1^∞, k^∞ pro $k < 0$

Př: 1) $\lim_{n\to\infty} (5n^2 - 3n) = [\infty - \infty] = \lim_{n\to\infty} n(5n-3) = \infty \cdot \infty = \underline{\underline{\infty}}$

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n}{2n^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3 + \overbrace{\frac{5}{n}}^{\to 0})}{n^2(2 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0})} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

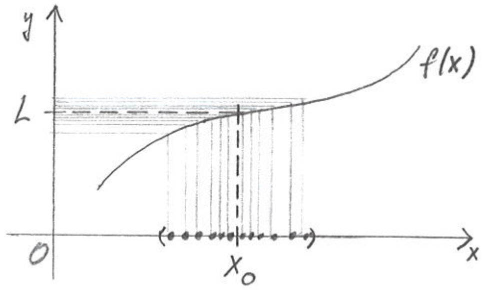
LIMITA FUNKCE

- $P(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ ... prstencové okolí bodu x_0
  $P^+(x_0, \delta) = (x_0, x_0 + \delta)$ ... pravé prstencové okolí bodu x_0
  $P^-(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0)$ ... levé prstencové okolí bodu x_0
  $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$

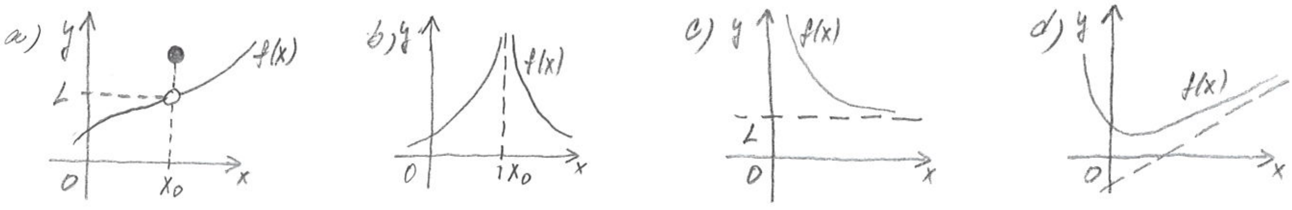
Heineho definice limity: Řekneme, že funkce $f: y = f(x)$ má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ **limitu** rovnu číslu $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže

1. funkce f je definovaná v nějakém prstencovém okolí $P(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$,
2. pro každou posloupnost $(x_n) \subset P(x_0)$ s vlastností $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Píšeme: $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

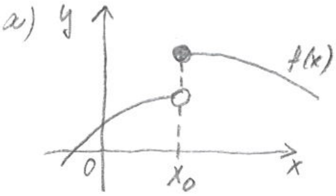


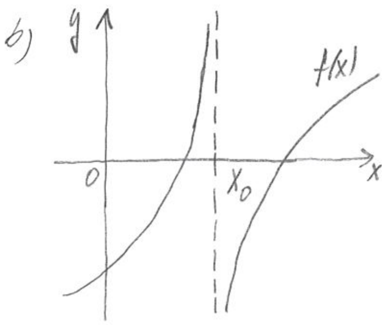
Př: • $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$



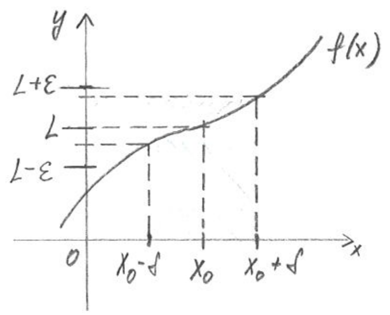
a) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$ b) $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \infty$ c) $x_0 = \infty$, $L \in \mathbb{R}$ d) $x_0 = \infty$, $L = \infty$

- funkce $f(x)$ nemá v bodě x_0 limitu:





Cauchyho definice limity: Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ **limitu** $L \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P(x_0, \delta)$ platí $|f(x) - L| < \varepsilon$.



Stručný zápis: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 ; \ \forall x \in P(x_0, \delta) : |f(x) - L| < \varepsilon$

Poznámka: Zaměníme-li v definici limity $P(x_0)$ za $P^+(x_0)$, resp. $P^-(x_0)$, dostaneme definici **limity zprava**, resp. **limity zleva**. - jednostranné limity
Píšeme $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$, resp. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

Věta: Každá funkce má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}^*$ nejvýše jednu limitu.
(Plyne z jednoznačnosti limity posloupnosti.)

Věta: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

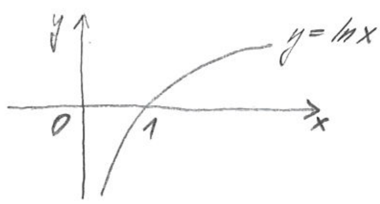
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \implies \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neexistuje

Př: Z grafu funkce určete limity:

1, $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \ln x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

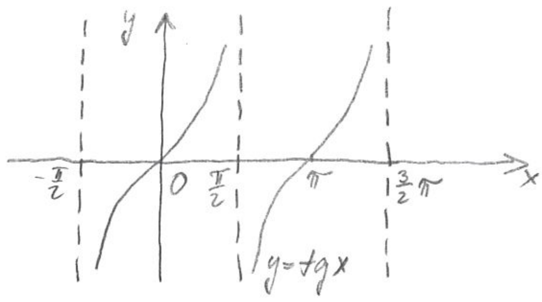


2, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x = -\infty$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = \infty$

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ neexistuje



SPOJITOST FUNKCE

- $\mathcal{U}(x_0,\delta) = (x_0-\delta,\, x_0+\delta)$ ... okolí bodu x_0
  $\mathcal{U}^+(x_0,\delta) = \langle x_0,\, x_0+\delta)$ ... pravé okolí bodu x_0
  $\mathcal{U}^-(x_0,\delta) = (x_0-\delta,\, x_0\rangle$ ... levé okolí bodu x_0

  $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R},\ \delta > 0$

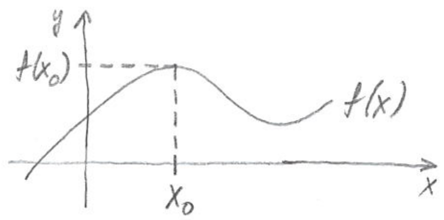
Definice: 1) Funkce f je **spojitá v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
a) f je definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$,
b) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Funkce f je **spojitá zprava**, resp. **spojitá zleva**, **v bodě** $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže
a) f je definovaná v pravém okolí $\mathcal{U}^+(x_0)$, resp. v levém okolí $\mathcal{U}^-(x_0)$,
b) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

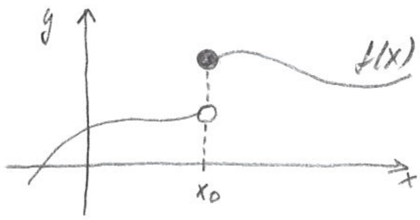
3) Funkce f je **spojitá na otevřeném intervalu** $(c,d) \subseteq \mathcal{D}(f)$, je-li spojitá v každém bodě tohoto intervalu.

4) Funkce f je **spojitá na uzavřeném intervalu** $\langle c,d\rangle \subseteq \mathcal{D}(f)$, je-li spojitá v intervalu (c,d) a současně je spojitá zprava v bodě c a zleva v bodě d.

Př: fce je spojitá v x_0



fce není spojitá v x_0



Je-li fce spojitá v bodě x_0, pak má v tomto bodě také limitu rovnu funkční hodnotě $f(x_0)$.

VLASTNOSTI LIMITY FUNKCE

Věta: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$, $L_1, L_2, x_0 \in \mathbb{R}^*$

a) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = L_1 \pm L_2$

b) $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L_1 \cdot L_2$

c) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$

d) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|$

Pokud $x_0 \in \mathbb{R}$, platí i pro jednostranné limity.

- Limita složené funkce: $\lim\limits_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim\limits_{x\to x_0} g(x))$

Věta: Jestliže $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$, a existuje-li prstencové okolí $P(x_0)$ v němž pro všechna $x \in P(x_0)$ platí $f(x) > 0$, resp. $f(x) < 0$, pak

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty, \quad \text{resp.} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Př: 1, $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - x + 1) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to\infty} x(x - 1 - \underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}) = \infty \cdot \infty = \infty$

2, $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ $\quad (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0)$

3, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \left[\dfrac{1}{0^+}\right] = \infty$