LIMITA FUNKCE

Př: Vypočtěte limity:

1) $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \underline{\underline{\infty}}$

→ limita pro x jdoucí k 2 zprava funkce $\frac{1}{x-2}$

Postup: 1. Do výrazu $\frac{1}{x-2}$ dosadíme za x číslo 2 →
→ dostaneme $\frac{1}{0}$, tj. neurčitý výraz.

2. K číslu 2 se blížíme zprava ⇒ za x můžeme místo čísla 2 dosadit číslo, které je dostatečně blízko čísla 2 a zároveň napravo od čísla 2; např. 2,00001.

Je zřejmé, že čím bližší číslo k číslu 2 zvolíme, tím víc se rozdíl $x-2$ bude blížit k nule; zároveň tento rozdíl bude stále kladný ⇒
⇒ $x-2$ se blíží k nule zprava (značíme 0^+).

3. Dostáváme $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \left[\frac{1}{0^+}\right]$ a musíme určit výraz $\frac{1}{0^+}$ →

→ Dělíme kladné číslo „malinkatým" kladným číslem ⇒ dostaneme „obrovské" kladné číslo, tedy číslo blížící se k nekonečnu ⇒

⇒ $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{2}{x-4} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = \underline{\underline{-\infty}}$

→ limita pro x jdoucí k 4 zleva funkce $\frac{2}{x-4}$

Postup: 1. Do výrazu $\frac{2}{x-4}$ dosadíme za x číslo 4 →
→ dostaneme neurčitý výraz $\frac{2}{0}$.

2. K číslu 4 se blížíme zleva ⇒ za x můžeme místo čísla 4 dosadit číslo, které je dostatečně blízko číslu 4 a zároveň nalevo od čísla 4; např. 3,99999.

Je zřejmé, že čím bližší číslo k číslu 4 zvolíme, tím víc se rozdíl $x-4$ bude blížit k nule;
zároveň tento rozdíl bude stále záporný ⇒
⇒ $x-4$ se blíží k nule zleva (značíme 0^-).

3. Dostáváme $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{2}{x-4} = \left[\frac{2}{0^-}\right]$ a musíme určit výraz $\frac{2}{0^-}$ →

$\Rightarrow$ Dělíme kladné číslo „malinkatým" záporným číslem $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ dostaneme „obrovské" záporné číslo, tedy číslo blížící se k minus nekonečnu.

$$\Rightarrow \lim_{x \to 4^-} \frac{2}{x-4} = -\infty.$$

Následující příklady vyřešíme pomocí obdobných úvah, jako v příkladech 1) a 2).

3) $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{3-x}{2x-4} = \left[\frac{5}{0^+}\right] = \underline{\underline{\infty}}$

4) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-2x}{1-x} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = \underline{\underline{-\infty}}$

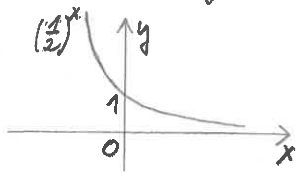
5) $\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{x^2}{3-x} = \left[\frac{9}{0^-}\right] = \underline{\underline{-\infty}}$

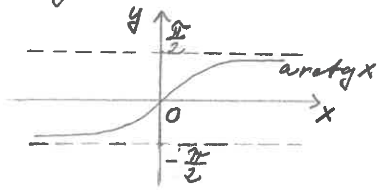
6) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1-4x}{2x-2} = \left[\frac{-3}{0^-}\right] = \underline{\underline{\infty}}$

Př.: Vypočtěte limity:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \operatorname{arctg} x\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x + \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \overset{*}{=} 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

* obě limity určíme z grafu funkce:





2) $\lim\limits_{x\to -1}\underbrace{\frac{x^3+x^2+x+1}{2x^2+x-1}}_{f(x)} \underset{1.}{=} \left[\frac{0}{0}\right] \underset{2.}{=} \lim\limits_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x+1)(2x-1)} \underset{3.}{=} \lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+1}{2x-1} \underset{4.}{=} \frac{(-1)^2+1}{2\cdot(-1)-1} = -\frac{2}{3}$

1. Za x dosadíme −1 → dostaneme neurčitý výraz $\frac{0}{0}$

2. Čitatele i jmenovatele funkce f(x) rozložíme na součin kořenových činitelů

$$x^3+x^2+x+1 = x^2(x+1)+x+1 = (x+1)(x^2+1)$$

$$2x^2+x-1 = 2(x+1)(x-\tfrac{1}{2}) = (x+1)(2x-1)$$

$$D = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$$

$$x_{12} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot 2} = \frac{-1\pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{1}{2}\end{cases}$$

3. Zkrátíme výraz x+1

4. Znovu za x dosadíme −1

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4+x^3-4}{2x^4+x^2+3x} \underset{1.}{=} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \underset{2.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^4\left(2+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} \underset{3.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{4}{x^4}}}{2+\underset{\downarrow 0}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x^3}}} = \frac{3}{2}$

1. Za x dosadím ∞ → dostaneme neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$ ($\infty+\infty=\infty$; $\infty^n=\infty$, kde $n\in\mathbb{N}$)

2. Z čitatele i ze jmenovatele vytkneme nejvyšší mocninu x, která je ve jmenovateli, tj. x^4. Poté zlomek zkrátíme výrazem x^4.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ … jedničku dělíme „velkým" číslem → dostaneme „malinké" číslo, které se blíží k nule

obdobně: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^4} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^3} = 0$

Proto, když za x opět dosadíme ∞, dostaneme

$$\frac{3+0+0}{2+0+0} = \frac{2}{3}$$

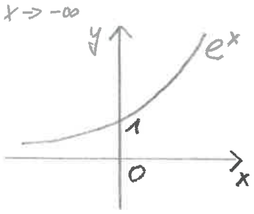
4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x\cdot \underbrace{e^x}_{\to 0^+}} = \left[\frac{-\infty}{-\infty\cdot 0^+}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x\cdot(1+\frac{1}{x})}{x\cdot e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0^-}}{\underbrace{e^x}_{\to 0^+}} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = \infty$

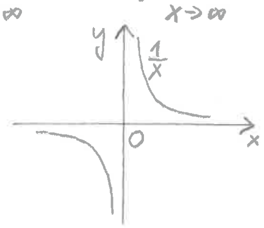
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x}{x\cdot \underbrace{\operatorname{arccotg} x}_{\to 0^+}} = \left[\frac{-\infty}{\infty\cdot 0^+}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-1)}{x\cdot\operatorname{arccotg} x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{1}{x}}^{\to 0^+}-1}{\underbrace{\operatorname{arccotg} x}_{\to 0^+}} = \left[\frac{-1}{0^+}\right] = -\infty$

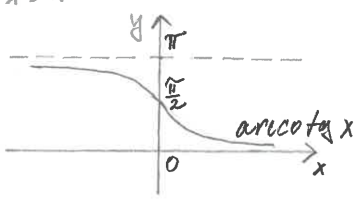
Příklady 4) a 5) řešíme obdobně jako příklad 3):
- z čitatele vytkneme x a zkrátíme.

Z grafu určíme limity:

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0^-$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0^+$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccotg} x = 0^+$







Př: Vypočtěte limity složených funkcí:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\frac{x^2+3}{2x^2+x} \overset{*}{=} \ln\frac{1}{2} = \underbrace{\ln 1}_{0} - \ln 2 = -\ln 2$

Nejprve vypočteme limitu vnitřní složky (obdobně jako v předchozím příkladu 3) – tj. vytkneme x^2 a zkrátíme).

$* \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{2x^2+x} = \left[\frac{\infty}{\infty-\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2(1+\frac{3}{x^2})}{x^2(2+\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{\to 0}}{2+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} = \frac{1}{2}$

Obdobně vyřešíme i následující příklady.

2) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{2x}{x^2-1}} \overset{*}{=} e^0 = 1$

$* \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\frac{2}{x}}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\frac{2}{x}}^{\to 0}}{1-\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{0}{1} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{x^2+x+1} \overset{*}{=} [\operatorname{arctg}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2}$ → určíme z grafu

$* \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2+x+1} = \left[\frac{-\infty}{\infty-\infty}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot x}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$

4) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \underbrace{\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^2+4}}_{*} = \infty\cdot\operatorname{arctg} 1 = \infty\cdot\frac{\pi}{4} = \infty$

$* \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+4} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{\to 0}} = \frac{1}{1} = 1$