APLIKACE KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU PRVNÍHO DRUHU

Př.: Vypočtěte délku křivky μ.

1) $\mu: \vec{r} = \underbrace{a\cos t}_{x} \cdot \vec{i} + \underbrace{a\sin t}_{y} \cdot \vec{j} + \underbrace{vt}_{z} \cdot \vec{k}$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$; $a, v > 0$

μ je 1/4 závitu šroubovice

$$\mu: \begin{aligned} x &= a\cos t \quad \rightarrow \quad dx = -a\sin t\, dt \\ y &= a\sin t \quad \rightarrow \quad dy = a\cos t\, dt \\ z &= vt \quad \rightarrow \quad dz = v\, dt \end{aligned}$$

$t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$L = \int_\mu ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + v^2}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}_{1} + v^2}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2+v^2}\, dt = \sqrt{a^2+v^2} \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+v^2}}}$$

2) μ je část průnikové křivky ploch $y = x^2$, $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ pro $0 \le x \le 1$.

$$\mu: \begin{aligned} x &= t \quad \rightarrow \quad dx = dt \\ y &= t^2 \quad \rightarrow \quad dy = 2t\, dt \\ z &= \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} \quad \rightarrow \quad dz = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t}\, dt \end{aligned}$$

$t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$L = \int_\mu ds = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2\sqrt{t})^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2 + 2t}\, dt = \int_0^1 \sqrt{(1+2t)^2}\, dt \overset{*}{=}$$

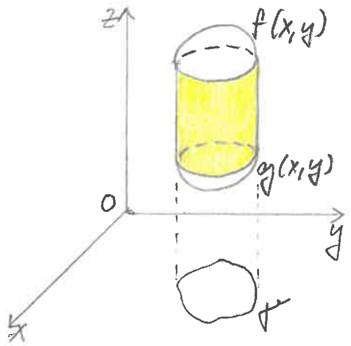
$$= \int_0^1 (1+2t)\, dt = [t + t^2]_0^1 = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

* lze odmocnit, protože $1 + 2t > 0 \;\forall\; t \in \langle 0, 1 \rangle$

Př: Vypočtěte obsah části válcové plochy s řídicí křivkou γ v rovině $z=0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezené plochami $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$.

Pozn.: 1. V této aplikaci je křivka γ vždy rovinná; její rovnici poznáme tak, že se v ní nevyskytuje proměnná z. Plocha $z=f(x,y)$ je ta, která je výš; plocha $z=g(x,y)$ je ta, která je níž.

2. Obsah části válcové plochy je obsah pláště válcového tělesa.



1) $\underbrace{\gamma: x^2+y^2=1}_{\text{kružnice se středem v počátku a poloměrem 1}}$; $\underbrace{\underbrace{z=x^2}_{g(x,y)},\ \underbrace{z=2+y^2}_{f(x,y)}}_{\text{parabolické válcové plochy}}$

γ: $x=\cos t \rightarrow dx=-\sin t\,dt$ $\quad z=x^2=\cos^2 t$

$y=\sin t \rightarrow dy=\cos t\,dt$ $\quad z=2+y^2=2+\sin^2 t$

$t\in\langle 0,2\pi\rangle$

$$S=\int_\gamma [f(x,y)-g(x,y)]\,ds=\int_\gamma [2+y^2-x^2]\,ds=\int_0^{2\pi}(\overbrace{2+\sin^2 t-\cos^2 t}^{2-(\overbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}^{\cos 2t})})\underbrace{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}_{1}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(2-\cos 2t)\,dt=\left[2t-\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=2\cdot 2\pi-\tfrac{1}{2}\underbrace{\sin 4\pi}_{0}-2\cdot 0+\tfrac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{0}=$$

$$=\underline{\underline{4\pi}}$$

2) $\gamma: \; y - \ln x = 0, \quad 1 \le x \le 2; \quad \underbrace{z = 0}_{g(x,y)}, \quad \underbrace{z = x^2}_{f(x,y)}$

$y = \ln x \qquad x \in \langle 1,2 \rangle \qquad z = x^2 = t^2$

$\gamma: \; x = t \;\rightarrow\; dx = dt$

$y = \ln t \;\rightarrow\; dy = \frac{1}{t}\,dt$

$t \in \langle 1,2 \rangle$

$$S = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\,ds = \int_\gamma (x^2 - 0)\,ds = \int_1^2 t^2 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2}\,dt = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}\,dt =$$

$$= \int_1^2 t^2 \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\,dt = \int_1^2 t^2 \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\,dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t\,dt \\ \frac{1}{2}du = t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 1 & 2 \\ \hline u & 2 & 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^5 \underbrace{\sqrt{u}}_{= u^{\frac{1}{2}}}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_2^5 \underset{\sqrt{u^3} = u\sqrt{u}}{=} \frac{1}{3}\left[u\sqrt{u}\right]_2^5 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}\right)$$

Př: Vypočtěte hmotnost křivky Γ s hustotou σ.

1) $\underbrace{\Gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad x\geq 0, \ y\geq 0}$; $\sigma(x,y)=xy$

Γ je 1/4 elipsy v prvním kvadrantu ; $a=2$, $b=3$

$\Gamma: x=2\cos t \rightarrow dx=-2\sin t\,dt$ $\qquad \sigma(x,y)=xy=2\cos t\cdot 3\sin t=$

$y=3\sin t \rightarrow dy=3\cos t\,dt$ $\qquad =3\sin 2t$

$t\in\langle 0;\frac{\pi}{2}\rangle$

$$m=\int_\Gamma \sigma(x,y)\,ds=\int_\Gamma xy\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2t\sqrt{4\sin^2 t+9\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=4\sin^2 t+9\cos^2 t \\ du=[8\sin t\cos t+18\cos t\cdot(-\sin t)]dt= \\ \quad =-10\sin t\cos t\,dt=-5\sin 2t\,dt \\ -\frac{1}{5}du=\sin 2t\,dt \end{array} \qquad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 9 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin 0=0, \ \cos 0=1 \\ \sin\frac{\pi}{2}=1, \ \cos\frac{\pi}{2}=0 \end{array}\right|=$$

$$=-\frac{3}{5}\int_9^4 \sqrt{u}\,du=\frac{3}{5}\int_4^9 u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{3}{5}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^9=\frac{2}{5}\left[u\sqrt{u}\right]_4^9=$$

$$=\frac{2}{5}(9\sqrt{9}-4\sqrt{4})=\frac{2}{5}(27-8)=\frac{2}{5}\cdot 19=\underline{\underline{\frac{38}{5}}}$$