APLIKACE KŘIVKOVÉHO INTEGRÁLU PRVNÍHO DRUHU

Př: Vypočtěte délku křivky μ.

1) $\mu: \vec{r} = \underbrace{a\cos t}_{x} \cdot \vec{i} + \underbrace{a\sin t}_{y} \cdot \vec{j} + \underbrace{vt}_{z} \cdot \vec{k}$, $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$; $a, v > 0$

μ je 1/4 závitu šroubovice

$$\mu: \begin{array}{lll} x = a\cos t & \rightarrow & dx = -a\sin t\,dt \\ y = a\sin t & \rightarrow & dy = a\cos t\,dt \\ z = vt & \rightarrow & dz = v\,dt \end{array}$$

$t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

$$L = \int_\mu ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + v^2}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\underbrace{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}_{1} + v^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2+v^2}\,dt = \sqrt{a^2+v^2} \cdot [t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}\sqrt{a^2+v^2}}}$$

2) μ je část průnikové křivky ploch $y = z^2$, $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}$ pro $0 \le x \le 1$.

$$\mu: \begin{array}{lll} x = t & \rightarrow & dx = dt \\ y = t^2 & \rightarrow & dy = 2t\,dt \\ z = \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}} & \rightarrow & dz = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}} dt = 2\sqrt{t}\,dt \end{array}$$

$t \in \langle 0, 1 \rangle$

$$L = \int_\mu ds = \int_0^1 \sqrt{1^2 + (2t)^2 + (2\sqrt{t})^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2+2t}\,dt = \int_0^1 \sqrt{(1+2t)^2}\,dt \overset{*}{=}$$

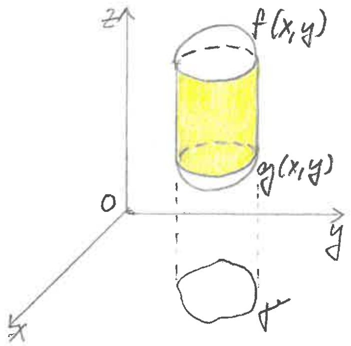
$$= \int_0^1 (1+2t)\,dt = [t + t^2]_0^1 = 1+1 = \underline{\underline{2}}$$

* lze odmocnit, protože $1+2t > 0 \ \forall\, t \in \langle 0, 1 \rangle$

Př: Vypočtěte obsah části válcové plochy s řídící křivkou γ v rovině $z=0$, tvořícími přímkami rovnoběžnými s osou z a vymezené plochami $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$.

Pozn.: 1. V této aplikaci je křivka γ vždy rovinná; její rovnici poznáme tak, že se v ní nevyskytuje proměnná z. Plocha $z=f(x,y)$ je ta, která je výš; plocha $z=g(x,y)$ je ta, která je níž.

2. Obsah části válcové plochy je obsah pláště válcového tělesa.



1) $\underbrace{\gamma: x^2+y^2=1}_{}$; $\underbrace{z=x^2}_{g(x,y)}$, $\underbrace{z=2+y^2}_{f(x,y)}$

kružnice se středem v počátku a poloměrem 1

parabolické válcové plochy

$\gamma: x=\cos t \quad \rightarrow \quad dx=-\sin t\,dt \qquad z=x^2=\cos^2 t$

$\quad y=\sin t \quad \rightarrow \quad dy=\cos t\,dt \qquad z=2+y^2=2+\sin^2 t$

$\quad t\in\langle 0,2\pi\rangle$

$$S=\int_\gamma [f(x,y)-g(x,y)]\,ds=\int_\gamma[2+y^2-x^2]\,ds=\int_0^{2\pi}\overbrace{(2+\sin^2 t-\cos^2 t)}^{2-(\overbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}^{\cos 2t})}\underbrace{\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}}_{1}\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(2-\cos 2t)\,dt=\left[2t-\tfrac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi}=2\cdot 2\pi-\tfrac{1}{2}\underbrace{\sin 4\pi}_{0}-2\cdot 0+\tfrac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{0}=$$

$$=\underline{\underline{4\pi}}$$

2) $\gamma: \; y - \ln x = 0, \quad 1 \le x \le 2; \quad \underbrace{z = 0}_{g(x,y)}, \quad \underbrace{z = x^2}_{f(x,y)}$

$y = \ln x \qquad x \in \langle 1, 2 \rangle \qquad z = x^2 = t^2$

$\gamma: \; x = t \;\rightarrow\; dx = dt$

$y = \ln t \;\rightarrow\; dy = \frac{1}{t} dt$

$t \in \langle 1, 2 \rangle$

$$S = \int_\gamma [f(x,y) - g(x,y)]\, ds = \int_\gamma (x^2 - 0)\, ds = \int_1^2 t^2 \cdot \sqrt{1^2 + \left(\tfrac{1}{t}\right)^2}\, dt = \int_1^2 t^2 \sqrt{1 + \tfrac{1}{t^2}}\, dt =$$

$$= \int_1^2 t^2 \sqrt{\frac{t^2+1}{t^2}}\, dt = \int_1^2 t^2 \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t}\, dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+1}\, dt = \left| \begin{array}{l} u = t^2+1 \\ du = 2t\,dt \\ \frac{1}{2} du = t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 1 & 2 \\ \hline u & 2 & 5 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \int_2^5 \underbrace{\sqrt{u}}_{= u^{\frac{1}{2}}}\, du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_2^5 = \frac{1}{3} \left[\underbrace{u\sqrt{u}}_{= \sqrt{u^3} = u\sqrt{u}} \right]_2^5 = \underline{\underline{\frac{1}{3}(5\sqrt{5} - 2\sqrt{2})}}$$

Př: Vypočtěte hmotnost křivky γ s hustotou σ.

1) $\underbrace{\gamma: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \quad x\geq 0, \; y\geq 0}$; $\sigma(x,y)=xy$

γ je 1/4 elipsy v prvním kvadrantu ; $a=2$, $b=3$

$\gamma: x = 2\cos t \quad \rightarrow \quad dx = -2\sin t \, dt$

$\quad y = 3\sin t \quad \rightarrow \quad dy = 3\cos t \, dt$

$\quad t \in \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$

$\sigma(x,y) = xy = 2\cos t \cdot 3\sin t = 3\sin 2t$

$$m = \int_\gamma \sigma(x,y)\,ds = \int_\gamma xy\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2t \sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t}\,dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 4\sin^2 t + 9\cos^2 t \\ du = [8\sin t\cos t + 18\cos t\cdot(-\sin t)]dt = \\ \quad = -10\sin t\cos t\,dt = -5\sin 2t\,dt \\ -\frac{1}{5}du = \sin 2t\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} t & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline u & 9 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin 0 = 0, \; \cos 0 = 1 \\ \sin\frac{\pi}{2} = 1, \; \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{3}{5}\int_9^4 \sqrt{u}\,du = \frac{3}{5}\int_4^9 u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{3}{5}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^9 = \frac{2}{5}\left[u\sqrt{u}\right]_4^9 =$$

$$= \frac{2}{5}(9\sqrt{9} - 4\sqrt{4}) = \frac{2}{5}(27-8) = \frac{2}{5}\cdot 19 = \underline{\underline{\frac{38}{5}}}$$