INVERZNÍ MATICE

čtvercová matice A $\rightarrow$ inverzní matice A^{-1}

platí: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$

A^{-1} existuje $\Leftrightarrow$ A je regulární

Výpočet: $\left(A \mid E \right) \xrightarrow{\text{EŘÚ}} \left(E \mid A^{-1} \right)$

- Vedle matice A napíšeme jednotkovou matici E stejného řádu jako je matice A.
- Pomocí elementárních řádkových úprav převedeme matici A na jednotkovou matici E.
- Tytéž úpravy aplikujeme zároveň na matici E, ze které pak vznikne hledaná matice A^{-1}.

Zkouška: Ověříme rovnosti $A \cdot A^{-1} = E$ nebo $A^{-1} \cdot A = E$.

Př.: Vypočtěte inverzní matici k matici A:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1) \,]+ \; /\cdot(-2) \,]+ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-1) \,]+ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-3) \,]+ \; /\cdot(-2) \,]+ \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 4 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) /\cdot(-3) \,]+ \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} /\cdot(-3) \ \ /\cdot(-5) \\ + \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -24 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ /\cdot 3 \\ /\cdot(-2) \ + \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} /\cdot 3 \ + \\ + \\ /\cdot 5 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} /\cdot 2 \ + \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 2 & 18 & -10 \\ 0 & -4 & 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{matrix} /:6 \\ /:(-4) \\ /:3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 3 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow$$

A^{-1} ... z celé matice vytkneme $\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 18 & -10 \\ -3 & -24 & 15 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} /\cdot 5 \ \ /\cdot(-3) \\ + \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 16 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & -8 & -8 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \\ /\cdot 2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 16 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Downarrow$$

$h(A) = 2 \Rightarrow A$ je singulární $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A^{-1} neexistuje