SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

ZÁKLADNÍ POJMY, POČET ŘEŠENÍ

Definice: Soustava m lineárních rovnic o n neznámých:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m .
\end{aligned}
$$

a_{ij} – koeficienty
$x_1, \dots, x_n$ – neznámé
$b_1, \dots, b_m$ – absolutní členy

$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ …… homogenní soustava
alespoň jedno $b_k \neq 0$ … nehomogenní soustava

Matice soustavy: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Rozšířená matice soustavy: $A_r = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$

– soustavu lze psát ve tvaru $\underset{(m,n)}{A} \cdot \underset{(n,1)}{X} = \underset{(m,1)}{B}$, kde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Frobeniova věta:

- Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$ má řešení, právě když $h(A) = h(A_r) = h$.
  - $h = n$ … soustava má právě jedno řešení
  - $h < n$ … soustava má nekonečně mnoho řešení, $n - h$ neznámých volíme jako parametry.
- Soustava nemá řešení, jestliže $h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$.

Poznámka: Homogenní soustava má vždy řešení ($h(A) = h(A_r)$ vždy),
- $h(A) = n$ … jedno **nulové (triviální) řešení** $(0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$ … nekonečně mnoho řešení, která závisejí na $n - h(A)$ parametrech.

GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

Př: 1) $\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & -3 & -5 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x + 2y + z = 3 \Rightarrow x = 3 - 2y - z = 3 \\ \Rightarrow y + z = 1 \Rightarrow y = 1 - z = -1 \\ \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow z = 2 \end{array}$$

$h(A) = h(A_r) = 3 \Rightarrow 1$ řešení $\qquad K = \{(3, -1, 2)\}$

2) $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = 4$$

$h(A) = 2,\ h(A_r) = 3 \Rightarrow h(A) \neq h(A_r) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ soustava nemá řešení, tj: $K = \emptyset$

3) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 3z &= 0 \end{aligned}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{r} x + 2y + z = 4 \\ z = 2 \\ \hline y = t \end{array} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 4 - 2y - z = 4 - 2t - 2 = \\ &= 2 - 2t \end{aligned}$$

$n = 3,\quad h(A) = h(A_r) = 2 < n \Rightarrow \infty$ řešení
$n - h(A) = 3 - 2 = 1$ parametr

$K = \{(2 - 2t,\ t,\ 2);\ t \in \mathbb{R}\}$

4) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \\ 3 & -4 & -6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & -10 & 0 & 20 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0 \Rightarrow (*) \\ x_2 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_4 = 2t \\ \hline x_4 = t,\quad x_3 = s \end{array}$$

$n = 4,\quad h(A) = h(A_r) = 2 < n \Rightarrow \infty$ řešení
$n - h(A) = 4 - 2 = 2$ parametry

$(*)\ x_1 = -2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -4t + 2s + 5t =$
$= t + 2s$

$K = \{(t + 2s,\ 2t,\ s,\ t);\ t, s \in \mathbb{R}\}$