

GAUSSOVA ELIMINAČNÍ METODA

Frobeniorova věta:

Soustava $A \cdot X = B$

1) má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A_n) = h$

a) $n = h \dots$ právě jedno řešení

b) $n > h \dots$ nekonečně mnoho řešení $\rightarrow n - h$ parametrů

2) nemá řešení $\Leftrightarrow h(A) \neq h(A_n)$, tj. $h(A_n) = h(A) + 1$

Př: Gaussovou eliminační metodou řešte soustavu lineárních rovnic.
Pomocí Frobeniorovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

$$\begin{aligned} 1) \quad & x + y - 2z = -1 \\ & 3x + 2y + z = 0 \\ & 2x + 3y + z = 7 \\ & 2x + y + 3z = 1 \end{aligned}$$

Postup: 1. Rozšířenou matici soustavy přerodíme pomocí elementárních řádkových úprav na schodovitý tvar.

2. Poslední matice (ve schodovitém tvaru) odpovídá nové jednodušší soustavě, která má stejné řešení jako zadaná soustava.

3. Z nové soustavy již jednoduše zpětným výpočtem určíme řešení.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{aligned} x + y - 2z &= -1 & \Rightarrow x &= -1 - y + 2z = -1 - 4 + 2 \cdot 1 = -3 \\ y - 7z &= -3 & \Rightarrow y &= -3 + 7z = -3 + 7 \cdot 1 = 4 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$(-3, 4, 1)$

... řešením dané soustavy rovnic je uspořádaná trojice.

Existence a počet řešení:

$$\left. \begin{aligned} h(A) &= h(A_n) = 3 = h \\ n &= 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow n = h \Rightarrow \text{soustava má právě jedno řešení}$$

$$2) \begin{cases} 6x + 5y + 4z = 3 \\ 2x + y - z = -2 \\ 2x + 3y + 6z = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{[1] \cdot (-3)} \xrightarrow{[2] \cdot (-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 7 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{[2] \cdot (-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} h(A) = 2 \\ h(A_r) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow h(A) \neq h(A_r) \Rightarrow \text{soustava nemá řešení}$$

$$\underline{K = \emptyset}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 3y + z = 1 \\ x + 4y - 2z = 3 \\ x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{[2] \cdot (-1)} \xrightarrow{[3] \cdot (-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{[3] \cdot 3} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} h(A) = h(A_r) = 2 = h \\ n = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow n > h \Rightarrow \text{soustava má nekonečně mnoho řešení} \\ n - h = 3 - 2 = 1 \dots \text{jednu neznámou volíme jako parametr}$$

Za parametr můžeme zvolit neznámou y nebo neznámou z .

$$\text{I. zp.: } \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ y - z = 1 \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y + z = 2 - 3(1+z) + z = 2 - 3 - 3z + z = -1 - 2z \\ y = 1 + z = 1 + z \\ z = z \end{cases}$$

$$\underline{\underline{(-1 - 2z, 1 + z, z); z \in \mathbb{R}}}$$

$$\text{II. zp.: } \begin{cases} x + 3y - z = 2 \\ y - z = 1 \\ y = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y + z = 2 - 3y + y - 1 = 1 - 2y \\ z = y - 1 = y - 1 \\ y = y \end{cases}$$

$$\underline{\underline{(1 - 2s, s, s - 1); s \in \mathbb{R}}}$$

Pozn: Stačí určit jeden tvar řešení.

$$\begin{aligned}
 4) \quad & x+y+z+v=5 \\
 & x-y+z-v=-1 \\
 & x+y-z+v=3 \\
 & x-y-z-v=-3
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -8 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-2) \\ \cdot(-2) \\ \cdot(-2) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+y+z+v=5 \\ y+v=3 \\ z=1 \end{array}$$

$h(A) = h(A_r) = 3 = h$
 $n = 4$

$\Rightarrow n > h \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
 $n - h = 4 - 3 = 1 \dots$ jednu neznámou volíme jako parametr

Za parametr můžeme zvolit neznámou y nebo neznámou v ;
 zvolíme např.: $y = t$

$$\begin{aligned}
 x+y+z+v=5 & \Rightarrow x=5-y-z-v=5-t-1-(3-t)=5-t-1-3+t=1 \\
 y+v=3 & \Rightarrow v=3-y=3-t \\
 z & = 1 \\
 y & = t
 \end{aligned}$$

$(1, t, 1, 3-t); t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & x+y+z-v=2 \\
 & x+y=1 \\
 & 2x+2y-z+v=1 \\
 & 6x+6y+z-v=7
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot(-2) \leftarrow + \cdot(-6) \leftarrow + \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 5 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \cdot 3 \leftarrow + \\ \cdot 5 \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x+y+z-v=2 \\ z-v=1 \end{array}$$

$h(A) = h(A_r) = 2 = h$
 $n = 4$

$\Rightarrow n > h \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
 $n - h = 4 - 2 = 2 \dots$ dvě neznámé volíme jako parametry

Za jeden parametr můžeme zvolit neznámou z nebo neznámou v ,
 za druhý parametr můžeme zvolit neznámou x nebo neznámou y ;
 zvolíme např.: $x = t, v = s$.

$$\begin{aligned} x+y+z-v=2 &\Rightarrow y=2-x-z+v=2-t-(1+s)+s=2-t-1-s+s=1-t \\ z-v=1 &\Rightarrow z=1+v=1+s \\ x &=t \\ v &=s \end{aligned}$$

$$\underline{(t, 1-t, 1+s, s); t, s \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad x+2y+z-v &= 0 \\ 2x+3y-z+2v &= 0 \\ 4x+7y+z &= 0 \end{aligned}$$

Homogenní soustava rovnic \Rightarrow
 \Rightarrow stačí upravit na schodovitý tvar
 jen maticí soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x+2y+z-v &= 0 \\ \Rightarrow y+3z-4v &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Homogenní soustava má vždy řešení (řád platí $h(A) = h(A_r)$).
 $\left. \begin{array}{l} h(A) = 2 \\ n = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow n > h(A) \Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení
 $n - h(A) = 4 - 2 = 2 \dots$ dvě neznámé zvolíme jako parametry

Za parametry můžeme zvolit dvě neznámé z trojice y, z, v ;
 zvolíme např.: $z = t, v = s \dots$ nejrychlejší volba, 2 rovnice (*) se nejjednoduššeji vyjádří neznámá y .

$$\begin{aligned} x+2y+z-v=0 &\Rightarrow x=v-z-2y=s-t-2(4s-3t)=s-t-8s+6t=5t-7s \\ y+3z-4v=0 &\Rightarrow y=4v-3z=4s-3t \\ z &=t \\ v &=s \end{aligned}$$

$$\underline{(5t-7s, 4s-3t, t, s); t, s \in \mathbb{R}}$$