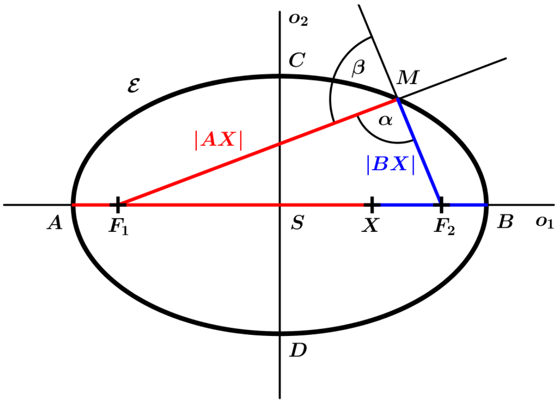
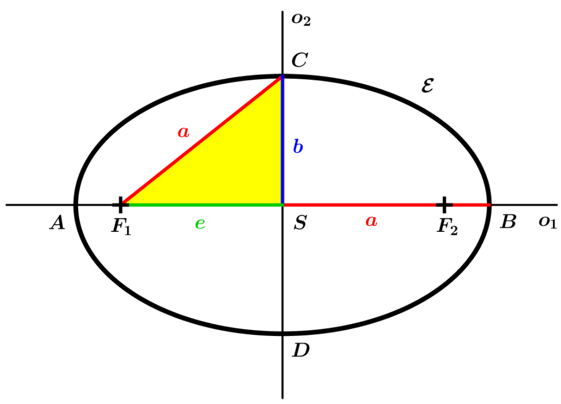
ELIPSA

Definice: ***Elipsa*** $\mathcal{E}$ je množina všech bodů roviny, které mají od dvou pevných různých bodů, zvaných ***ohniska*** (značíme F_1, F_2), této roviny stálý součet vzdáleností rovný $2a$, který je větší než vzdálenost ohnisek.





$M \in \mathcal{E} \Rightarrow |MF_1| + |MF_2| = 2a$

a . . . ***délka hlavní poloosy***
b . . . ***délka vedlejší poloosy***
e . . . ***excentricita***

charakteristický trojúhelník: $a^2 = b^2 + e^2$

$o_1 = AB$ . . . ***hlavní osa***
$o_2 = CD$ . . . ***vedlejší osa***
$S = o_1 \cap o_2$ . . . ***střed***
$A,\ B$ . . . ***hlavní vrcholy***
$C,\ D$ . . . ***vedlejší vrcholy***

$a = |AS| = |BS|$
$b = |CS| = |DS|$
$e = |F_1S| = |F_2S|$

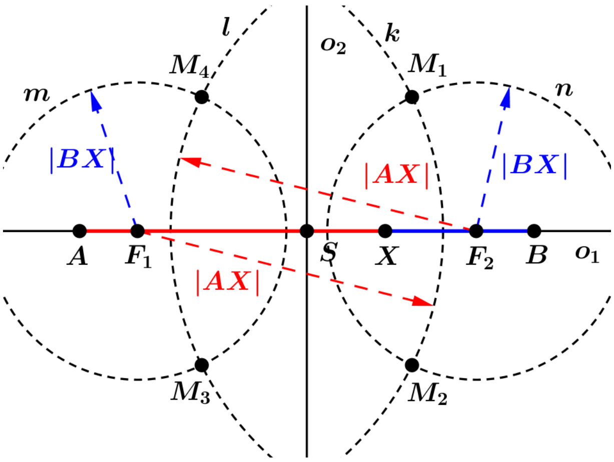
Bodová konstrukce elipsy:

1. $X;\ X \in AB$

2. $k;\ k(F_1, |AX|)$
$l;\ l(F_2, |AX|)$

3. $m;\ m(F_1, |BX|)$
$n;\ n(F_2, |BX|)$

4. Dostáváme čtyři obecné body elipsy:
$\{M_1, M_2\} \in k \cap n,\ \{M_3, M_4\} \in l \cap m$



Oskulační kružnice:

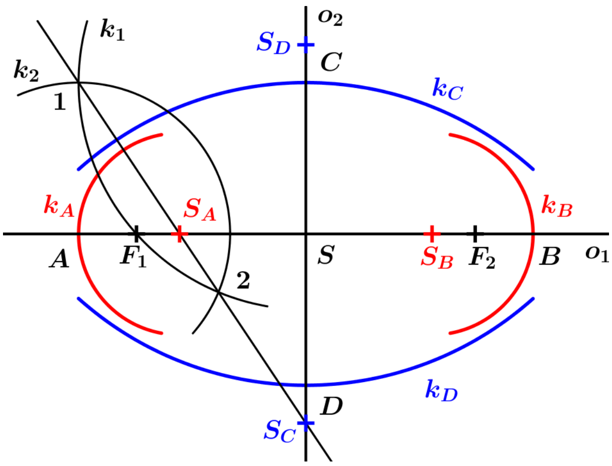
1. $k_1;\ k_1(C, a)$
$k_2;\ k_2(A, b)$

2. $1, 2;\ \{1, 2\} \in k_1 \cap k_2$

3. $S_A;\ S_A = 12 \cap o_1$
$S_C;\ S_C = 12 \cap o_2$

4. $S_B;\ S_B \in o_1 \wedge |AS_A| = |BS_B|$
$S_D;\ S_D \in o_2 \wedge |CS_C| = |DS_D|$

5. $k_A;\ k_A(S_A, |AS_A|)$
$k_B;\ k_B(S_B, |BS_B|)$
$k_C;\ k_C(S_C, |CS_C|)$
$k_D;\ k_D(S_D, |DS_D|)$



Oskulační kružnice pro hlavní vrcholy leží celé uvnitř elipsy.
Oskulační kružnice pro vedlejší vrcholy leží celé vně elipsy.

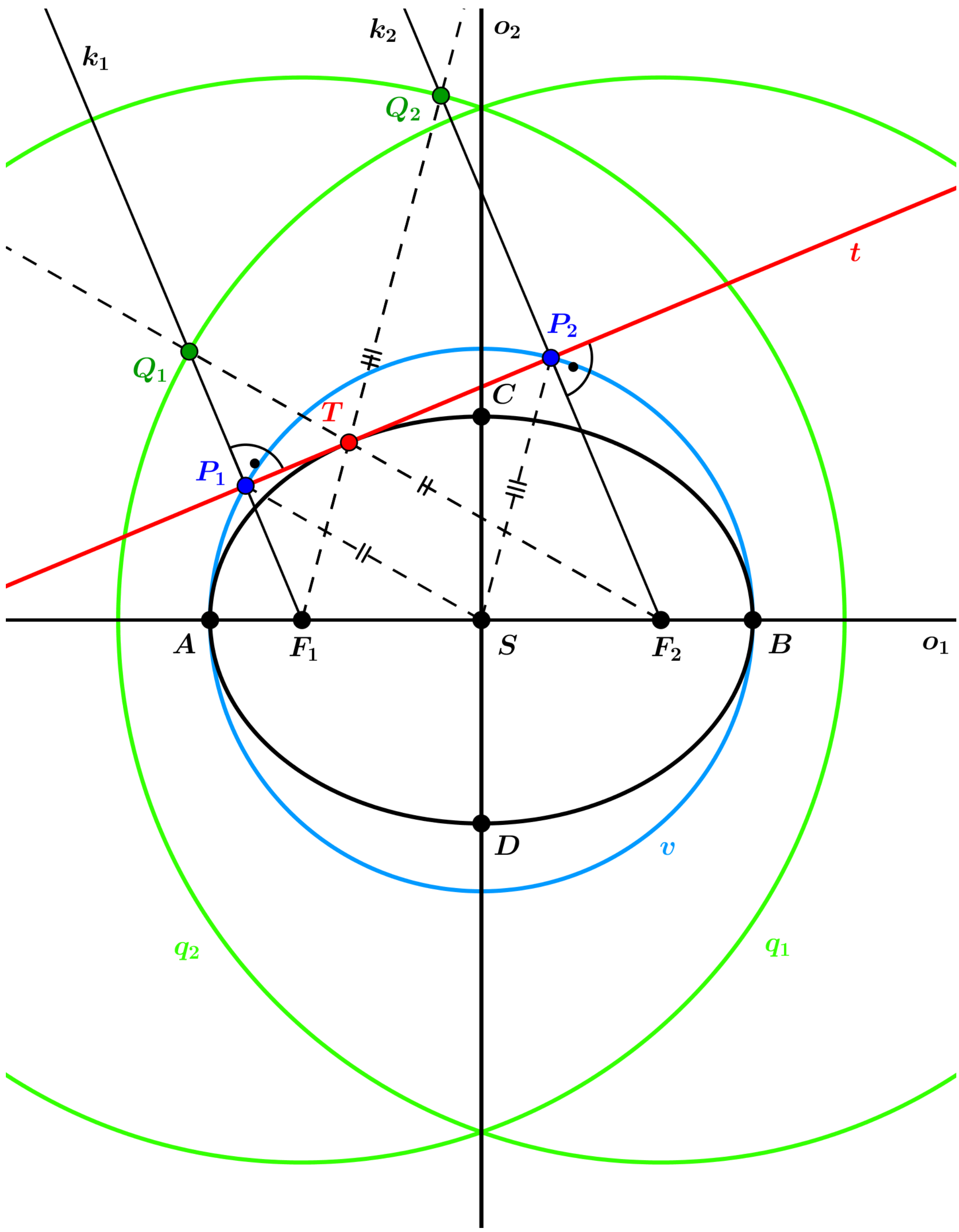
$MF_1,\ MF_2 \dots$ ***průvodiče*** bodu M
vnitřní úhel průvodičů $\dots \measuredangle F_1MF_2$ (obsahující střed S)
vnější úhel průvodičů ... vedlejší úhel k vnitřnímu úhlu průvodičů

$v(S;a) \dots$ ***vrcholová kružnice***
$q_1(F_1;2a),\ q_2(F_2;2a) \dots$ ***řídicí kružnice***

Věta 1: Tečna půlí vnější úhel průvodičů.

Věta 2: Paty kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny leží na vrcholové kružnici.

Věta 3: Body souměrně sdružené s jedním ohniskem elipsy podle jejích tečen leží na řídicí kružnici se středem v druhém ohnisku.

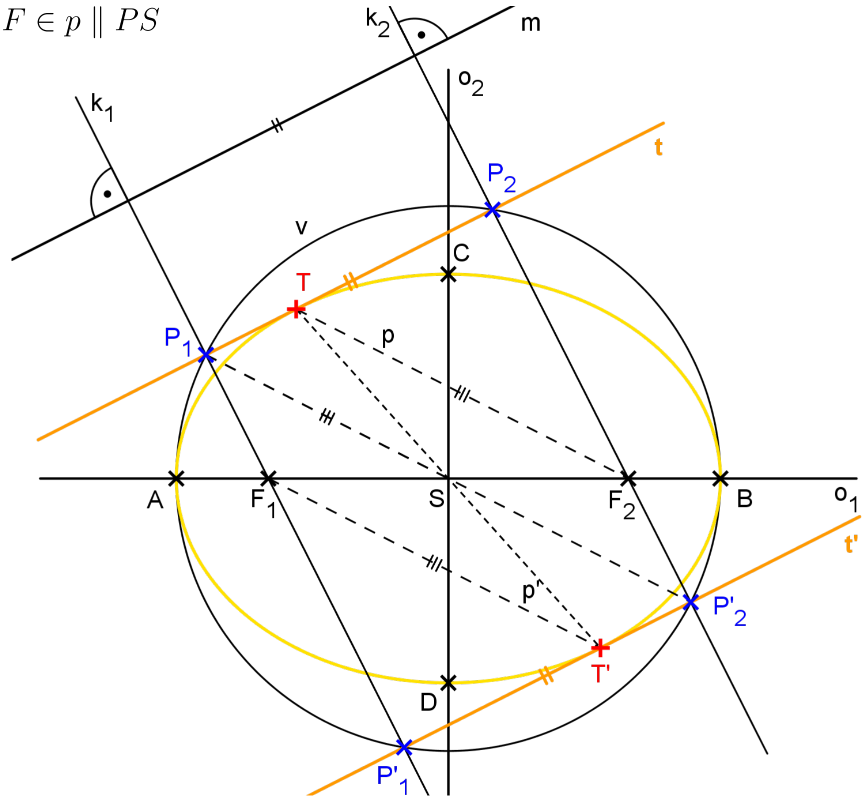


Tečny elipsy rovnoběžné s přímkou m

$$\boldsymbol{P}: \left.\begin{array}{l} P \in v(S,a) \\ P \in k;\ F \in k \perp m \end{array}\right\} \Rightarrow P \in v \cap k$$

$\boldsymbol{t}:\ P \in t \parallel m$

$\boldsymbol{T}:\ T \in t \cap p;\ F \in p \parallel PS$



Tečny elipsy jdoucí vnějším bodem R

I. způsob – pomocí řídící kružnice $q_1(F_1, 2a)$

$$\boldsymbol{Q}: \left.\begin{array}{l} Q \in q_1(F_1, 2a) \\ Q \in k(R, |RF_2|) \end{array}\right\} \Rightarrow Q \in q_1 \cap k$$

$\boldsymbol{t}:\ R \in t \perp F_2Q \ldots t$ je osa F_2Q

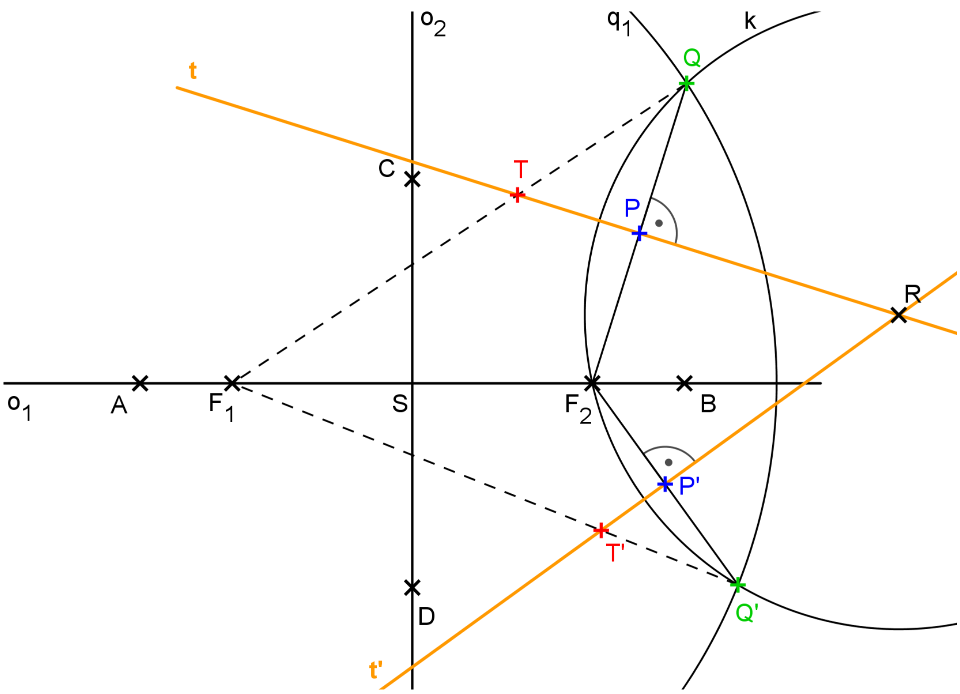
$\boldsymbol{T}:\ T \in t \cap F_1Q$

II. způsob – pomocí řídící kružnice $q_2(F_2, 2a)$

$$\boldsymbol{Q}: \left.\begin{array}{l} Q \in q_2(F_2, 2a) \\ Q \in k(R, |RF_1|) \end{array}\right\} \Rightarrow Q \in q_2 \cap k$$

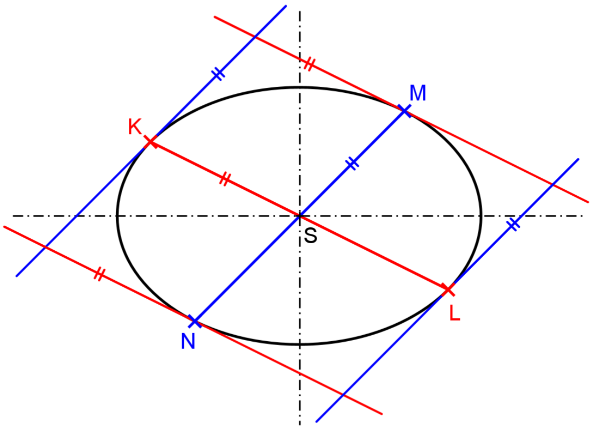
$\boldsymbol{t}:\ R \in t \perp F_1Q \ldots t$ je osa F_1Q

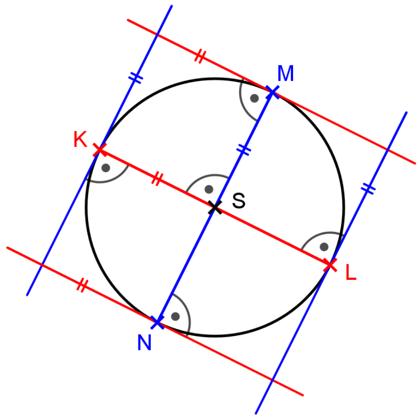
$\boldsymbol{T}:\ T \in t \cap F_2Q$



Sdružené průměry

Průměrem elipsy (***kružnice***) se nazývá tětiva procházející jejím středem.
Dva ***průměry*** elipsy (kružnice) se nazývají ***sdružené***, jestliže tečny v koncových bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem a naopak.

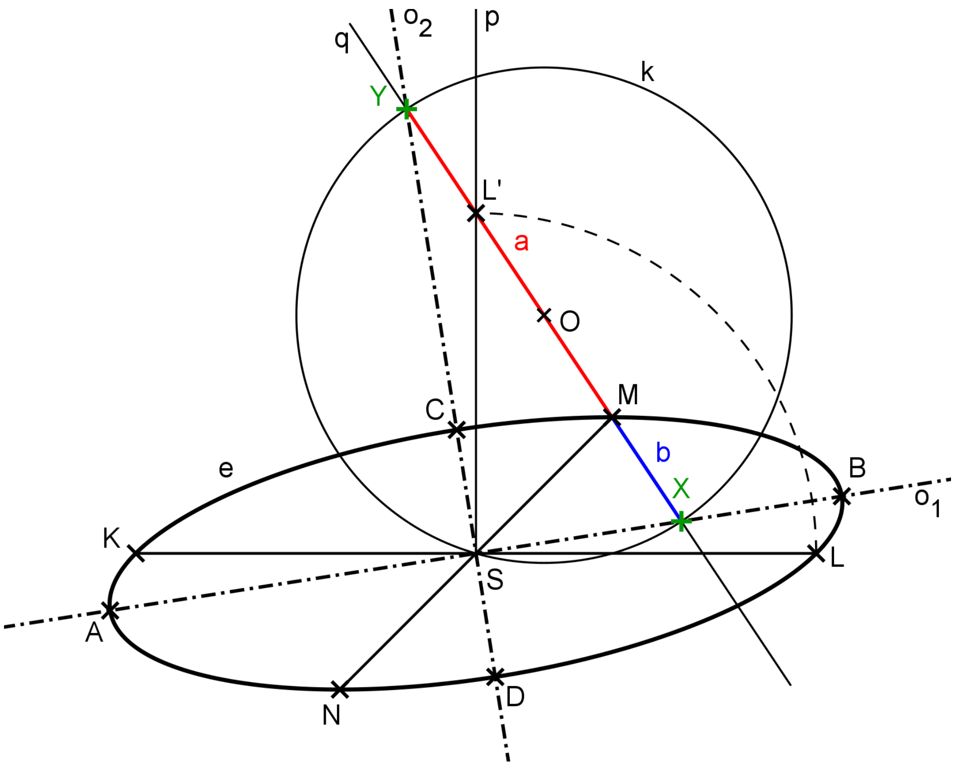




Sdružené průměry kružnice jsou vždy na sebe kolmé.
Osy elipsy jsou jediná navzájem kolmá dvojice sdružených průměrů elipsy.

RYTZOVA KONSTRUKCE

Využíváme k nalezení os a vrcholů elipsy, známe-li její sdružené průměry.



1. p; $S \in p \perp KL$

2. L'; $L' \in p \wedge |L'S| = |LS|$

3. q; $q = L'M$

4. O; O je střed $L'M$

5. k; $k(O, |OS|)$

6. X, Y; $k \cap q = \{X, Y\}$

7. $o_1 = XS$ ... leží v menším (ostrém) úhlu, který svírají sdružené průměry
$o_2 = YS$ ... leží ve větším (tupém) úhlu, který svírají sdružené průměry

8. $a = |MY| = |L'X|$
$b = |MX| = |L'Y|$

9. Hlavní a vedlejší vrcholy

10. Oskulační kružnice; vyrýsujeme elipsu

PROUŽKOVÁ KONSTRUKCE

Využíváme k nalezení délky vedlejší poloosy elipsy, známe-li její osy, délku hlavní poloosy a obecný bod.

1. k; $k(M, a)$

2. V; $V \in k \cap o_2$

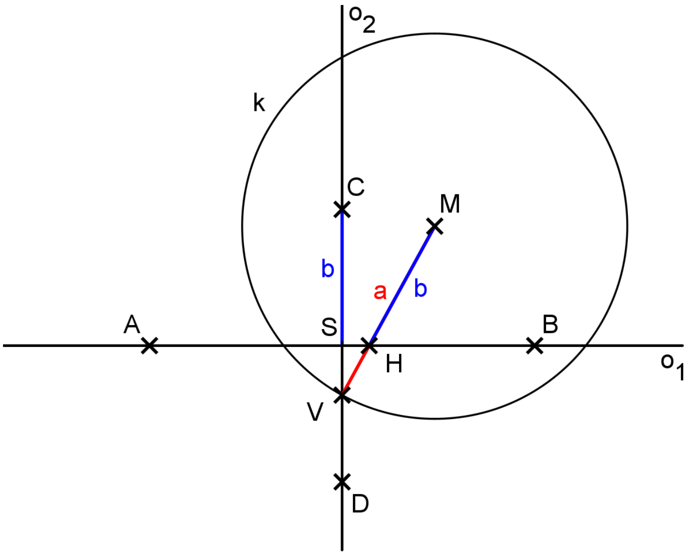
3. H; $H \in MV \cap o_1$

4. b; $b = |MH|$

5. Vedlejší vrcholy

6. Oskulační kružnice; vyrýsujeme elipsu

ROZDÍLOVÁ PROUŽKOVÁ KONSTRUKCE



SOUČTOVÁ PROUŽKOVÁ KONSTRUKCE