DETERMINANTY

DEFINICE DETERMINANTU

Determinant n-tého řádu je schéma tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kterému je přiřazena hodnota (číslo).

- stručný zápis: $|A| = |a_{ij}|$, kde $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n.

- Determinant 1. řádu: $|a_{11}| = a_{11}$

- Determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

(křížové pravidlo)

- Determinant 3. řádu:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

(Sarrusovo pravidlo)

- Pro výpočet determinantů 4. a vyšších řádů musíme použít úpravy determinantů a Laplaceův rozvoj determinantu. (Vhodné i pro determinanty 3. řádu.)

Př: 1, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 = 10 - 4 = \underline{\underline{6}}$

2, $$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & -5 & -2 \end{matrix} \end{array} = 2 \cdot (-5) \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 1 \cdot (-2) - (-4)(-5)(-1) - (-2) 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 =$$

$$= -30 - 24 + 2 + 20 + 8 - 9 = \underline{\underline{-33}}$$

VLASTNOSTI DETERMINANTŮ

1, Hodnota determinantu se nezmění, vyměníme-li sloupce za řádky (transponováním).

2, Vyměníme-li v determinantu mezi sebou dva různé řádky (sloupce), změní se znaménko determinantu.

3, Obsahuje-li některý řádek (sloupec) determinantu samé nuly, je hodnota determinantu rovna nule.

4, Determinant, který má dva stejné řádky (sloupce), je roven nule.

5, Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k, je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k-násobku hodnoty původního determinantu.

6, Je-li některý řádek (sloupec) determinantu roven k-násobku jiného řádku (sloupce), je determinant roven nule.

7, Hodnota determinantu se nezmění, přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) k-násobek jiného řádku (sloupce).

8, Jsou-li v determinantu všechny prvky nad (pod) hlavní diagonálou rovny nule, je hodnota determinantu rovna součinu prvků na hlavní diagonále.

Př: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot4 - 2\cdot3 = -2$ 1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot4 - 3\cdot2 = -2$

2, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot2 - 4\cdot1 = 2$

3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot0 - 2\cdot0 = 0$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot2 - 2\cdot1 = 0$

5, $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot4 - 4\cdot3 = -4$

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot4 - 2\cdot2 = 0$

7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1\cdot(-3) \\ \end{matrix} + = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2) - 2\cdot0 = -2$

8) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot4\cdot6 = 24$

Definice: **Subdeterminant** A_{ij} přidružený k prvku a_{ij} je determinant, který vznikne z determinantu $|A| = |a_{ij}|$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij}.

Definice: **Algebraický doplněk** $\bar{A}_{ij}$ prvku a_{ij}: $\bar{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot A_{ij}$.

Věta (Laplaceův rozvoj determinantu podle daného řádku (sloupce)): Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného, ale pevně zvoleného řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky, tj.

$$|A| = \sum_j a_{ij} \bar{A}_{ij} = \sum_i a_{ij} \bar{A}_{ij}.$$

$$\left(|A| = \underbrace{\sum_j (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}}_{\text{podle řádku}} = \underbrace{\sum_i (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}}_{\text{podle sloupce}} \right)$$

Př:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 = \underline{\underline{10}}$$

Rozvoj podle 2. řádku:
$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 19 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 19 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (38-30) + 2 \cdot (38-40) + 1 \cdot (6-8) = 2 \cdot 8 + 2 \cdot (-2) - 2 = \underline{\underline{10}}$$

Př:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 9 & 0 & 14 & 5 \\ -3 & 0 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \underbrace{-1 \cdot (-1)^{1+2}}_{1} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 14 & 5 \\ -3 & -2 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 14 & 5 \\ -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-18+15) = -3 \cdot (-3) = \underline{\underline{9}}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 12 & -24 & 3 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 6 & -13 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 12 & -24 & 3 \\ 0 & 6 & -13 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 1 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 8 \end{matrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3 = \underline{\underline{9}}$$

Věta: Čtvercová matice A je regulární, jestliže $|A| \neq 0$.
-singulární, jestliže $|A| = 0$.

Platí: A, B - čtvercové matice řádu n; $k \in \mathbb{R}$:

1, $A = B \Rightarrow |A| = |B|$

2, $|kA| = k^n \cdot |A|$

3, $|A^T| = |A|$

4, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

5, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$