

DIFERENCIÁLNÍ FUNKCE

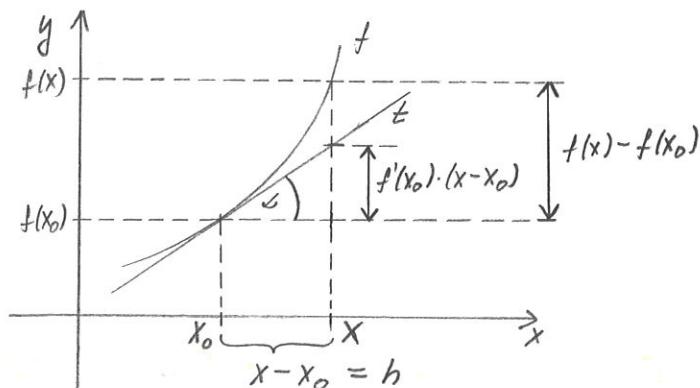
$$\underbrace{f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\text{definice derivace}} \Rightarrow \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \exists \rho(x_0, \varepsilon) : \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon}_{\text{definice limity}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall \rho(x_0, \varepsilon)$$

tj: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow$

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{prírůstek funkčních hodnot}} \approx \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{prírůstek funkčních hodnot na tečně}} = f'(x_0) \cdot h$$



Definice: Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak vyjádř

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0 pro přírůstek h nezávisle proměnné x .**

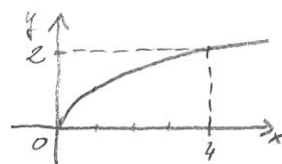
Přírůstek funkčních hodnot nahradíme přírůstkem na tečně.

Př: a) Vypočítejte $df(4; 0,1)$ pro $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$df(4; 0,1) = f'(4) \cdot 0,1 = 0,25 \cdot 0,1 = \underline{\underline{0,025}}$$



$$\sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{4,1} \approx 2,025$$

b) Vypočítejte přibližně hodnotu $\ln \frac{5}{4}$

$$\ln \frac{5}{4} \approx \ln 1 + df(1; \frac{1}{4}) \approx \underline{\underline{0,25}}$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1$$

$$df(1; \frac{1}{4}) = f'(1) \cdot \frac{1}{4} = 1 \cdot \frac{1}{4} = 0,25$$

- c) Užitím diferenciálu určete absolutní a relativní chybu, která vznikne výpočtem obsahu čtverce z naměřené délky strany $x_0 = 5\text{ m}$, jestliže měření je zatíženo chybou nepřesňující $0,1\text{ cm}$ ($= 0,001\text{ m}$)

Absolutní chyba $\hat{=}$ diferenciál

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 & f(x_0) &= 25 \\ f'(x) &= 2x & f'(x_0) &= f'(5) = 10 \end{aligned}$$

$$df(\underbrace{5}_{x_0}; \underbrace{0,001}_h) = 10 \cdot 0,001 = \underline{\underline{0,01\text{ m}}}$$

$$\text{Relativní chyba} \hat{=} \frac{\text{Absolutní chyba}}{f(x_0)} = \frac{0,01}{25} \hat{=} 0,0004 = \underline{\underline{4 \cdot 10^{-4}}}$$

DIFERENCIÁLY VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$$\begin{aligned} df(x_0, h) &= f'(x_0) \cdot h & \dots & \text{diferenciál 1. řádu} \\ d^2f(x_0, h) &= f''(x_0) \cdot h^2 & \dots & \text{diferenciál 2. řádu} \\ d^n f(x_0, h) &= f^{(n)}(x_0) \cdot h^n & \dots & \text{diferenciál } n\text{-tého řádu} \end{aligned}$$

} funkce f
v bodě x_0

Př: Určete $d^3 f(2; 0,1)$ pro $f(x) = \arctg x$.

$$d^3 f(2; 0,1) = f'''(2) \cdot 0,1^3$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^2 - 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = -\frac{(1+x^2)(2+2x^2-8x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(2) = \frac{6 \cdot 2^2 - 2}{(1+2^2)^3} = \frac{22}{125}$$

$$d^3 f(2; 0,1) = \frac{22}{125} \cdot \frac{1}{1000} = \underline{\underline{\frac{22}{125000}}}$$

TAYLORŮV POLYNOM

Definice: Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n , pak polynom

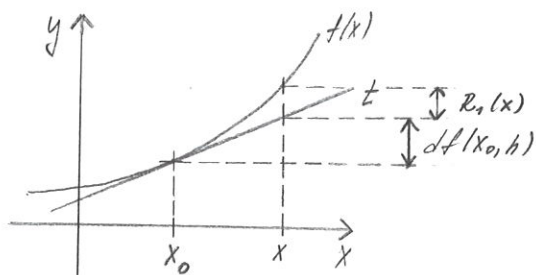
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

se nazývá Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0 .

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x); \quad R_n(x) \dots \text{zbytek řádu } n$$

$x_0 = 0 \dots$ Maclaurinův polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0, h)}{1!} + \frac{d^2f(x_0, h)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, h)}{n!}$$



$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) \dots \text{tečna } \pm$$

- lineární aproximace

polynom vyššího stupně -
- lepší aproximace

$$\text{V okolí bodu } x_0: f(x) \approx T_n(x)$$

Pr: Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x\sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

$$f(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$$

$$f(1) = 1$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$$

$$f'(1) = \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$f''(1) = \frac{3}{4}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{8x\sqrt{x}}$$

$$f'''(1) = -\frac{3}{8}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{1!} (x-1) + \frac{\frac{3}{4}}{2!} (x-1)^2 + \frac{-\frac{3}{8}}{3!} (x-1)^3 = \underline{\underline{1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3}}$$

Pr: Určete Maclaurinův polynom n . stupně funkce $f(x) = xe^x$.

$$f(x) = e^x + xe^x$$

$$x_0 = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$f'(x) = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = 2e^x + e^x + xe^x = 3e^x + xe^x$$

$$f''(0) = 2$$

$$f^{(n)}(x) = ne^x + xe^x$$

$$f^{(n)}(0) = 3$$

$$f^{(n)}(0) = n$$

$$T_n(x) = 0 + \frac{1}{1!} x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{3}{3!} x^3 + \dots + \frac{n}{n!} x^n = \underline{\underline{\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \cdot x^k}}$$

Pr: Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\arctg \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \arctg x, \quad x_0 = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\frac{2(1+x^2)^{-2} - 2x \cdot 2(1+x^2)^{-3} \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(0) = -2$$

$$T_3(x) = x - \frac{2}{3}x^3 = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\underbrace{\arctg \frac{1}{2}} = T_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{11}{24} = 0,458\bar{3}$$

$$= 0,4636$$

L'HOSPITALOVO PRAVIDLO

Věta (L'Hospitalovo pravidlo): Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- pro limity typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\text{cokoliv}}{\pm \infty}$

Pr: 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (-x) = \underline{\underline{-1}}$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{LP}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^3} \cdot 3x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = \underline{\underline{0}}$