DERIVACE FUNKCE

DERIVACE FUNKCE, ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI

Definice: Je-li funkce f definovaná v nějakém okolí $\mathcal{U}(x_0)$ bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a existuje-li limita

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

nazýváme ji **derivací funkce f v bodě x_0** a značíme ji $f'(x_0)$.

$f'(x_0) \in \mathbb{R}$ .... f má v bodě x_0 **vlastní derivaci**
$f'(x_0) = \pm\infty$ .... f má v bodě x_0 **nevlastní derivaci**
limita neexistuje ... f nemá v bodě x_0 derivaci

Derivace zprava funkce f v bodě x_0: $\quad f'_+(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

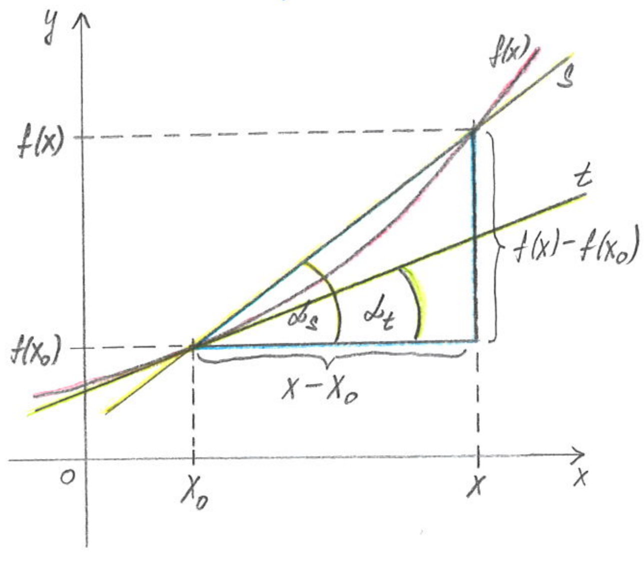
Derivace zleva funkce f v bodě x_0: $\quad f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Je-li f funkce a $M = \{x \in \mathbb{R};$ existuje vlastní $f'(x_0)\}$, pak funkci $f': x \mapsto f'(x)$ s definičním oborem M nazveme **derivací funkce f na množině M**.

1, Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci zprava i zleva a platí $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

2, Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. (tj. $f'(x_0) \in \mathbb{R}$)

Geometrický význam derivace



$$\operatorname{tg}\alpha_s = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$x \to x_0$ ... sečna $\Rightarrow$ tečna

$$\operatorname{tg}\alpha_t = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg}\alpha_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

směrnice tečny = derivace v x_0

- Rovnice tečny a normály ke grafu funkce f v bodě $A[x_0, f(x_0)]$:

$$\boxed{\begin{aligned} t&: \; y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0) \\ n&: \; y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x-x_0) \end{aligned}}$$

Př: a) Z definice derivace odvoďte $f'(x_0)$:

$$f(x) = x^3 \qquad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x-x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = 3x_0^2$$

b) Napište rovnici tečny a normály pro $f(x) = x^3$ v bodě $A[2, ?]$:

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad A[2, 8]$$
$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$$

$t: \; y - 8 = 12(x-2)$ $\qquad$ $n: \; y - 8 = -\frac{1}{12}(x-2)$

Pravidla pro derivování:

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$, $g(x) \neq 0$

Derivace elementárních funkcí:

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky platnosti
c	0	$x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	• $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ • $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}^-$ • $x \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \in \mathbb{R}^+$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

$f(x)$	$f'(x)$	podmínky platnosti
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
$\mathrm{cotg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in (-1, 1)$
$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\mathrm{arccotg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Př: 1, $f(x) = x^3 + 5x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{4x} + \ln 2 = x^3+5x^2+x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}x^{-1} + \ln 2$

$f'(x) = 3x^2 + 5\cdot 2x + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}\cdot(-1)\cdot x^{-2} + 0 = 3x^2 + 10x + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4x^2}$

2, $f(x) = x\cdot \ln x$

$f'(x) = 1\cdot \ln x + x\cdot \frac{1}{x} = 1 + \ln x$

3, $f(x) = \frac{\sin x}{x^5}$

$f'(x) = \frac{\cos x\cdot x^5 - \sin x\cdot 5x^4}{x^{10}} = \frac{x\cos x - 5\sin x}{x^6}$

4, $f(x) = \frac{1-x^4}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}\cdot(1-x^4)$

$f'(x) = -\frac{4x^3}{\ln 4}$

$f(x) = \frac{\cos x}{2}$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2}$

$f(x) = \frac{x}{5}$

$f'(x) = \frac{1}{5}$

5, $f(x) = \frac{e^x(1-x)}{1+x}$

$f'(x) = \frac{[e^x(1-x) + e^x\cdot(-1)]\cdot(1+x) - e^x(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2} = -\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^2}$

6, $f(x) = (x^3-2x)\cdot \cos x\cdot \operatorname{arctg} x$

$f'(x) = (3x^2-2)\cdot\cos x\cdot \operatorname{arctg} x + (x^3-2x)\cdot(-\sin x)\cdot \operatorname{arctg} x + (x^3-2x)\cdot \cos x\cdot \frac{1}{1+x^2}$

DERIVACE SLOŽENÉ FUNKCE

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Př: 1, $f(x) = e^{-2x}$

$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2)$

$f(x) = \operatorname{tg}(5-x^2)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(5-x^2)}\cdot(-2x)$

2, $f(x) = \sin(\ln(x^2+1))$

$f'(x) = \cos(\ln(x^2+1))\cdot \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$

3, $f(x) = \sqrt{1+\ln^2 x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+\ln^2 x}}\cdot 2\cdot \ln x\cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x\cdot\sqrt{1+\ln^2 x}}$

4, $f(x) = \cos^3 \frac{x}{4}$

$f'(x) = 3\cdot \cos^2\frac{x}{4}\cdot\left(-\sin\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}$

5, $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{4+x^2-6x+9}{4}} = \frac{2}{x^2-6x+13}$

6, $f(x) = 2\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}$ $= x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x}}}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x-1}}$

Př: $f(x) = x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$

$$f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x+1-x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) =$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{2(x+1)^2 \cdot \sqrt{\frac{x}{(x+1)^2}}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1-1-x}{1+x} =$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2}}{(x+1)^2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+1}} - \frac{x}{2(1+x)\sqrt{x}} =$$

$$= \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} - \frac{\sqrt{x}}{2(x+1)} = \underline{\underline{\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}}}$$

Př: Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = \arcsin x^2$ v bodě $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$f(x_0) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x$ $\qquad$ $f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$t: \ y - \frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\qquad$ $n: \ y - \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

DERIVACE INVERZNÍ FUNKCE

Věta: Je-li funkce f spojitá a prostá na otevřeném intervalu J a má-li v bodě $y_0 \in J$ derivaci $f'(y_0) \neq 0$, pak funkce f^{-1} má derivaci v bodě $x_0 = f(y_0)$ a platí:

$$\left(f^{-1}(x_0)\right)' = \frac{1}{f'(y_0)} .$$

Př: $f^{-1}: y = \operatorname{arctg} x$

$f: x = \operatorname{tg} y$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \underline{\underline{\frac{1}{1+x^2}}}$$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$f(x)$ ... derivace $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

derivace $f'(x)$ ... $f''(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ ... derivace 2. řádu funkce f v bodě x_0

Derivace n-tého řádu: $f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}$

Př: Určete derivace 4. řádu

a) $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

$f'''(x) = (-x^{-2})' = -(-2)x^{-3} = \frac{2}{x^3}$

$f^{IV}(x) = (2x^{-3})' = 2\cdot(-3)x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$

b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 3$

$f''(x) = 6x + 4$

$f'''(x) = 6$

$f^{IV}(x) = f^{(5)} = \ldots = f^{(n)} = 0$

c) $f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2\cos 2x$

$f''(x) = -4\sin 2x$

$f'''(x) = -8\cos 2x$

$f^{IV}(x) = 16\sin 2x$