DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY – METODA VARIACE KONSTANT

Řešíme NLDR s konstantními koeficienty 2. řádu

(1) $y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$,

kde $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Konstrukce obecného řešení:

1. Najdeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

(2) $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

Obecné řešení rovnice (2) má tvar

(3) $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$,

kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.

2. Metoda variace konstant

Hledáme partikulární řešení rovnice (1) ve tvaru:

(4) $y_p(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x)$

(Konstanty c_1, c_2 v (3) zaměníme za prozatím neznámé funkce $c_1(x)$, $c_2(x)$.)

První derivace hledaných funkcí $c_1(x)$ a $c_2(x)$ musí vyhovovat systému rovnic:

$$\begin{cases} c_1'(x) \cdot y_1(x) + c_2'(x) \cdot y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) \cdot y_1'(x) + c_2'(x) \cdot y_2'(x) = 0 \end{cases}$$

3. Obecné řešení rovnice (1):

$$y = \underbrace{c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}_{(3)} + \underbrace{y_p(x)}_{(4)}$$

Př.: Najděte obecné řešení diferenciálních rovnic:

1) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

1. $y'' - 2y' + y = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda_{12} = 1 \quad \rightarrow \quad \underbrace{e^x}_{y_1(x)}, \; \underbrace{xe^x}_{y_2(x)}$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x$

2. $y_p(x) = c_1(x) \cdot e^x + c_2(x) \cdot x e^x \quad \ldots \quad (e^x)' = e^x, \quad (xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$

$c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot x e^x = 0 \quad /: e^x$

$c_1'(x) \cdot e^x + c_2'(x) \cdot (1+x) e^x = \frac{e^x}{x} \quad /: e^x$

$+\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) \cdot x = 0 & /\cdot(-1) \\ c_1'(x) + c_2'(x) \cdot (1+x) = \frac{1}{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad c_1'(x) = -c_2'(x) \cdot x = -\frac{1}{x} \cdot x = -1$

$c_1(x) = -\int dx = -x$

$c_2'(x) = \frac{1}{x}$

$c_2(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$

$y_p(x) = -xe^x + \ln|x| \cdot xe^x$

3. $y = \underbrace{c_1}_{d_1} e^x + \underbrace{c_2 x e^x - x e^x}_{\underbrace{(c_2 - 1)}_{d_2} \cdot x e^x} + x e^x \ln|x|$

$y = d_1 e^x + d_2 x e^x + x e^x \ln|x|$

$y = (d_1 + d_2 x + x \ln|x|) \cdot e^x$

2) $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$

1. $y'' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4 = 0$

$\lambda^2 = -4$

$\lambda_{12} = \pm 2i \quad \rightarrow \quad e^0 \cos 2x = \underbrace{\cos 2x}_{y_1(x)}, \quad e^0 \sin 2x = \underbrace{\sin 2x}_{y_2(x)}$

$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

2. $y_p(x) = c_1(x) \cdot \cos 2x + c_2(x) \cdot \sin 2x \quad \ldots \quad (\cos 2x)' = -2\sin 2x, \quad (\sin 2x)' = 2\cos 2x$

$c_1'(x) \cdot \cos 2x + c_2'(x) \cdot \sin 2x = 0 \quad / \cdot 2\cos 2x$

$c_1'(x) \cdot (-2\sin 2x) + c_2'(x) \cdot 2\cos 2x = \frac{1}{\sin 2x} \quad / \cdot (-\sin 2x)$

$+\begin{cases} c_1'(x) \cdot 2\cos^2 2x + c_2'(x) \cdot 2\sin 2x \cos 2x = 0 \\ c_1(x) \cdot 2\sin^2 2x - c_2'(x) \cdot 2\sin 2x \cos 2x = -1 \end{cases}$

$2c_1'(x) \cdot \underbrace{(\sin^2 2x + \cos^2 2x)}_{1} = -1$

$c_1'(x) = -\frac{1}{2}$

$c_1(x) = -\frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}x$

$\Rightarrow c_2'(x) \sin 2x = -c_1'(x) \cos 2x$

$c_2'(x) = -c_1'(x) \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x}$

$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{\cos 2x}{\sin 2x} dx =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} dx =$

$= \frac{1}{4} \ln|\sin 2x|$

$y_p(x) = -\frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln|\sin 2x|$

3. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{2}x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \cdot \ln|\sin 2x|$

$y = (c_1 - \frac{1}{2}x)\cos 2x + (c_2 + \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|)\sin 2x$

3) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^{x+1}}$

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$

$(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$

$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -2 \quad \rightarrow \quad e^{-x}, \quad e^{-2x}$

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

2. $y_p(x) = c_1(x) \cdot e^{-x} + c_2(x) \cdot e^{-2x}$ ... $(e^{-x})' = -e^{-x}, \quad (e^{-2x})' = -2e^{-2x}$

$$+\begin{cases} c_1'(x) e^{-x} + c_2'(x) e^{-2x} = 0 \\ -c_1'(x) e^{-x} - 2c_2'(x) e^{-2x} = \frac{1}{e^{x+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$\rightarrow -c_2'(x) \cdot e^{-2x} = \frac{1}{e^{x+1}} \quad / \cdot (-e^{2x})$

$c_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{e^{x+1}} = -e^{2x-(x+1)} = -e^{x-1}$

$c_2(x) = -\int e^{x-1} dx = -e^{x-1}$

$c_1'(x) e^{-x} = -c_2'(x) e^{-2x}$

$c_1'(x) e^{-x} = e^{x-1} \cdot e^{-2x} \quad / \cdot e^{x}$

$c_1'(x) = e^{x-1} \cdot e^{-2x} \cdot e^{x} =$

$= e^{x-1-2x+x} = e^{-1}$

$c_1(x) = \int e^{-1} dx = e^{-1} x$

$y_p(x) = e^{-1} x \cdot e^{-x} - e^{x-1} \cdot e^{-2x}$

$y_p(x) = x e^{-x-1} - e^{-x-1}$

$y_p(x) = (x-1) e^{-x-1}$

3. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + (x-1) e^{-x-1}$

$y = \frac{c_1}{e^{x}} + \frac{c_2}{e^{2x}} + \frac{x-1}{e^{x+1}}$

4) $y'' + 4y' + 4y = x^{-3} e^{-2x}$

1. $y'' + 4y' + 4y = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$

$(\lambda + 2)^2 = 0$

$\lambda_{12} = -2 \quad \Rightarrow \quad e^{-2x}, \quad x e^{-2x}$

$\underline{y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}}$

2. $y_p(x) = c_1(x) \cdot e^{-2x} + c_2(x) \cdot x e^{-2x}$ ... $(e^{-2x}) = -2e^{-2x}, \quad (x e^{-2x})' = e^{-2x} - 2x e^{-2x}$

$c_1'(x) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) \cdot x e^{-2x} = 0 \quad /: e^{-2x}$

$-2c_1'(x) \cdot e^{-2x} + c_2'(x) \cdot (1-2x) e^{-2x} = x^{-3} e^{-2x} \quad /: e^{-2x}$

$+\begin{cases} c_1'(x) + c_2'(x) \cdot x = 0 & /\cdot 2 \\ -2c_1'(x) + c_2'(x) \cdot (1-2x) = x^{-3} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad c_1'(x) = -c_2'(x) \cdot x = -x^{-3} \cdot x = -x^{-2}$

$c_1(x) = \int x^{-2} dx = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$

$c_2'(x) \cdot (2x + 1 - 2x) = x^{-3}$

$c_2'(x) = x^{-3}$

$c_2(x) = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$

$y_p(x) = \frac{1}{x} e^{-2x} - \frac{1}{2x^2} x e^{-2x}$

$y_p(x) = \frac{1}{x} e^{-2x} - \frac{1}{2x} e^{-2x} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x}\right) e^{-2x} = \frac{2-1}{2x} e^{-2x} = \frac{1}{2x} e^{-2x}$

$\underline{y_p(x) = \frac{1}{2x} e^{-2x}}$

3. $y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{1}{2x} e^{-2x}$

$\underline{\underline{y = \left(c_1 + c_2 x + \frac{1}{2x}\right) e^{-2x}}}$