DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY A SPECIÁLNÍ PRAVOU STRANOU – METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ

Řešíme NLDR s konstantními koeficienty n-tého řádu

(1) $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x)$,

kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, za předpokladu, že pravá strana $g(x)$ má speciální tvar:

(2) $g(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_m(x) \cos\beta x + Q_r(x) \sin\beta x]$,

kde $P_m(x)$ a $Q_r(x)$ jsou polynomy stupňů m a r.

Konstrukce obecného řešení:

1. Najdeme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

(3) $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$.

(viz předchozí kapitola; řešení hledáme pomocí charakteristické rovnice.)

2. Metoda neurčitých koeficientů ⊛

Najdeme partikulární řešení rovnice (1) ve tvaru:

(4) $y_p(x) = x^k e^{\alpha x} \cdot [R_\ell(x) \cos\beta x + S_\ell(x) \sin\beta x]$,

kde $R_\ell(x)$ a $S_\ell(x)$ jsou polynomy stupně nejvýše $\ell = \max\{m, r\}$,

$$\begin{cases} k = 0 \iff \alpha + \beta i \text{ není kořenem charakteristické rovnice,} \\ k = \text{násobnosti kořene } \alpha + \beta i \iff \alpha + \beta i \text{ je kořenem charakteristické rovnice.} \end{cases}$$

Koeficienty polynomů $R_\ell(x)$ a $S_\ell(x)$ získáme dosazením partikulárního řešení $y_p(x)$ do rovnice (1)* a porovnáním koeficientů u stejných funkcí.**

* Nejprve spočítáme potřebné derivace $y_p(x)$ a teprve pak je dosadíme do (1).

** Stejný princip, jako u rozkladu na parciální zlomky.

3. Obecné řešení rovnice (1) dostaneme jako součet obecného řešení rovnice (3) a partikulárního řešení (4).

⊛ Tato metoda se také nazývá „Metoda odhadu“.
Lze použít jen v případě, že pravá strana rovnice (1) má speciální tvar (2).

Př.: Najděte obecné řešení diferenciálních rovnic:

1) $y^{(5)} + y^{(3)} = x^2 - 1 \quad (*)$

1. $y^{(5)} + y^{(3)} = 0$ ... přidružená homogenní rovnice k rovnici $(*)$

$\lambda^5 + \lambda^3 = 0$ ... charakteristická rovnice

$\lambda^3(\lambda^2+1) = 0$

- $\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{123} = 0 \rightarrow e^0 = 1,\ xe^0 = x,\ x^2e^0 = x^2$
- $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{45} = \pm i \rightarrow e^0\cos x = \cos x,\ e^0\sin x = \sin x$

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5\sin x$ ... obecné řešení přidružené homogenní rovnice

2. Pravá strana rovnice $(*)$ má tvar (2) pro:

$\alpha = \beta = 0,\quad P_m(x) = x^2 - 1,\quad Q_n(x) = 0$, tj:

$$g(x) = x^2 - 1 = \underbrace{e^0}_{1}[(x^2-1)\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} + 0\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}]$$

$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta i = 0 \text{ je trojnásobný kořen char. rce} \Rightarrow k = 3 \\ \ell = \max\{2, 0\} = 2 \quad (m = 2,\ r = 0) \end{array}\right.$

$$y_p(x) = x^3\underbrace{e^0}_{1}[\underbrace{(ax^2+bx+c)}_{R_2(x)}\cdot\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{(dx^2+ex+f)}_{S_2(x)}\cdot\underbrace{\sin 0}_{0}] = ax^5 + bx^4 + cx^3$$

$y_p'(x) = 5ax^4 + 4bx^3 + 3cx^2$

$y_p''(x) = 20ax^3 + 12bx^2 + 6cx$

$y_p^{(3)}(x) = 60ax^2 + 24bx + 6c$ ... dosadíme do $(*)$ za $y^{(3)}$

$y_p^{(4)}(x) = 120ax + 24b$

$y_p^{(5)}(x) = 120a$ ... dosadíme do $(*)$ za $y^{(5)}$

$$\underbrace{120a}_{y^{(5)}} + \underbrace{60ax^2 + 24bx + 6c}_{y^{(3)}} = x^2 - 1$$

Porovnáme koeficienty u stejných mocnin:

- x^2: $60a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{60}$
- x^1: $24b = 0 \Rightarrow b = 0$
- x^0: $120a + 6c = -1 \Rightarrow c = -\frac{1}{6}(1 + 120a) = -\frac{1}{6}(1+2) = -\frac{1}{2}$

$y_p(x) = \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3$

3. $$y = \underbrace{c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5\sin x}_{\text{obecné řešení přidružené homogenní rovnice}} + \underbrace{\frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{2}x^3}_{y_p(x)}$$ ... obecné řešení rovnice $(*)$

2) $y'' + y = 4x\sin x$

1. $y'' + y = 0$

$\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_{12} = \pm i \quad \rightarrow \quad e^0\cos x = \cos x, \quad e^0 \sin x = \sin x$

$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

2. $\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad P_m(x) = 0, \quad Q_r(x) = 4x \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 4x\sin x = e^0 [0 \cdot \cos x + 4x \cdot \sin x]$

$\{\alpha + \beta i = i$ je jednoduchý koreň charakteristickej rce $\Rightarrow k = 1$

$\ell = \max\{0, 1\} = 1 \quad (m=0, r=1)$

$\rightarrow y_p(x) = x^1 e^0 [\underbrace{(ax+b)}_{R_1(x)}\cos x + \underbrace{(cx+d)}_{S_1(x)}\sin x] = (ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x$

$y_p'(x) = (2ax+b)\cos x - (ax^2+bx)\sin x + (2cx+d)\sin x + (cx^2+dx)\cos x =$
$= (cx^2+2ax+dx+b)\cos x + (-ax^2-bx+2cx+d)\sin x$

$y_p''(x) = (2cx+2a+d)\cos x - (cx^2+2ax+dx+b)\sin x +$
$+ (-2ax-b+2c)\sin x + (-ax^2-bx+2cx+d)\cos x =$
$= (-ax^2-bx+4cx+2a+2d)\cos x + (-cx^2-4ax-dx-2b+2c)\sin x$

$\overbrace{(-ax^2-bx+4cx+2a+2d)\cos x + (-cx^2-4ax-dx-2b+2c)\sin x}^{y_p''(x)} +$
$+ \underbrace{(ax^2+bx)\cos x + (cx^2+dx)\sin x}_{y_p(x)} = 4x\sin x$

$(4cx+2a+2d)\cos x + (-4ax-2b+2c)\sin x = 4x\sin x$

$4cx\cos x + (2a+2d)\cos x - 4ax\sin x + (2c-2b)\sin x = 4x\sin x$

- $x\cos x: \quad 4c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$
- $\cos x: \quad 2a + 2d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -a = 1$
- $x\sin x: \quad -4a = 4 \quad \Rightarrow \quad a = -1$
- $\sin x: \quad 2c - 2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = c = 0$

$y_p(x) = -x^2\cos x + x\sin x$

3. $y = c_1\cos x + c_2 \sin x - x^2\cos x + x\sin x$

$y = (c_1 - x^2)\cos x + (c_2 + x)\sin x$

3) $y'' - 4y' + 8y = 5e^{3x} + \cos 2x \qquad (*)$

1. $y'' - 4y' + 8y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$

$D = 16 - 32 = -16$

$\lambda_{12} = \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i \rightarrow e^{2x}\cos 2x, \; e^{2x}\sin 2x$

$y = c_1 e^{2x}\cos 2x + c_2 e^{2x}\sin 2x$

2. Pravá strana rovnice $(*)$ je součtem dvou funkcí

$g_1(x) = 5e^{3x}, \quad g_2(x) = \cos 2x.$

Proto musíme řešení rozdělit na dvě části:

a) $\alpha = 3, \; \beta = 0, \; P_m(x) = 5, \; Q_r(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_1(x) = 5e^{3x} = e^{3x}[5 \cdot \cos 0 + 0 \cdot \sin 0]$

$\alpha + \beta i = 3$ není kořen char. rce $\Rightarrow k = 0$

$\ell = \max\{0, 0\} = 0 \qquad (m = r = 0)$

$y_{P1}(x) = x^0 e^{3x}[a\cos 0 + b\sin 0] = ae^{3x}$

$y'_{P1}(x) = 3ae^{3x}$

$y''_{P1}(x) = 9ae^{3x}$

jen $g_1(x)$!

$9ae^{3x} - 4 \cdot 3ae^{3x} + 8 \cdot ae^{3x} = 5e^{3x}$

$5ae^{3x} = 5e^{3x}$

$a = 1$

$y_{P1}(x) = e^{3x}$

b) $\alpha = 0, \; \beta = 2, \; P_m(x) = 1, \; Q_r(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow g_2(x) = \cos 2x = e^0[1 \cdot \cos 2x + 0 \cdot \sin 2x]$

$\alpha + \beta i = 2i$ není kořen char. rce $\Rightarrow k = 0$

$\ell = \max\{0, 0\} = 0$

$y_{P2}(x) = x^0 e^0[a\cos 2x + b\sin 2x] = a\cos 2x + b\sin 2x$

$y'_{P2}(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$

$y''_{P2}(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x$

jen $g_2(x)$!

$-4a\cos 2x - 4b\sin 2x - 4 \cdot (-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) +$

$+ 8 \cdot (a\cos 2x + b\sin 2x) = \cos 2x$

$(4a - 8b)\cos 2x + (8a + 4b)\sin 2x = \cos 2x$

$$\left.\begin{aligned} \cos 2x: &\quad 4a - 8b = 1 \\ \sin 2x: &\quad 8a + 4b = 0 \quad \cdot 2 \end{aligned}\right\} +$$

$20a = 1$

$\Rightarrow b = -2a = -\frac{1}{10}$

$\Rightarrow a = \frac{1}{20}$

$y_{P2}(x) = \frac{1}{20}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$

3. $$\underbrace{y = c_1 e^{2x}\cos 2x + c_2 e^{2x}\sin 2x}_{\text{obecné řešení homogenní rovnice}} + \underbrace{e^{3x}}_{+\, y_{P1}(x)\, +} + \underbrace{\frac{1}{20}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x}_{y_{P2}(x)}$$ ... obecné řešení rovnice (*)