DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE
HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY

HLDR s konstantními koeficienty má tvar:

(1) $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0,$

kde $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Charakteristická rovnice odpovídající diferenciální rovnici (1):

(2) $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$.

Konstrukce obecného řešení:

- Najdeme kořeny charakteristické rovnice (2). - reálné i komplexní $\Rightarrow$

a) Každému k-násobnému reálnému kořenu λ odpovídá celkem k partikulárních řešení

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Každé dvojici s-násobných komplexně sdružených kořenů $\alpha \pm \beta i$ odpovídá celkem $2s$ partikulárních řešení

$$\begin{cases} e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \dots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ x^2e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{s-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{cases}$$

- Součet násobností všech kořenů charakteristické rovnice (2) je n $\Rightarrow$ počet všech funkcí (partikulárních řešení) konstruovaných podle bodů a) a b) je rovněž n.

$\rightarrow$ Obecné řešení rovnice (1) je lineární kombinací všech těchto partikulárních řešení s n libovolnými koeficienty.

Počáteční úloha:

- Rovnice (1) je stupně n $\Rightarrow$ k rovnici (1) přidáme n podmínek, které postupně dosadíme do obecného řešení rovnice (1) a do prvních $n-1$ derivací obecného řešení rovnice (1).

Př.: Najděte obecné, resp. partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1) $y'' - 4y' + 3y = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ... charakteristická rovnice

$(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 1 \rightarrow e^x$

$\lambda_2 = 3 \rightarrow e^{3x}$

dva reálné jednoduché kořeny - oběma kořenům odpovídá první funkce z bodu a)

$\underline{y = c_1 e^x + c_2 e^{3x}}$ ... obecné řešení

2) $y'' + 4y' + 29y = 0$

$\lambda^2 + 4\lambda + 29 = 0$

$D = 16 - 4 \cdot 29 = 16 - 116 = -100$

$\lambda_{12} = \frac{-4 \pm 10i}{2} = -2 \pm 5i$ ... $\alpha = -2,\ \beta = 5 \rightarrow$ $e^{-2x}\cos 5x$, $e^{-2x}\sin 5x$

dvojice komplexně sdružených kořenů násobnosti 1 →
→ první dvojice funkcí z bodu b)

$y = c_1 e^{-2x}\cos 5x + c_2 e^{-2x}\sin 5x$

$\underline{y = e^{-2x}(c_1 \cos 5x + c_2 \sin 5x)}$

3) $y''' + y' = 0$

$\lambda^3 + \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$

- $\lambda_1 = 0 \rightarrow e^0 = 1$
- $\lambda^2 + 1 = 0$

  $\lambda^2 = -1$

  $\lambda_{2,3} = \pm i$ ... $\alpha = 0,\ \beta = 1 \rightarrow$ $e^0 \cos x = \cos x$, $e^0 \sin x = \sin x$

$\underline{y = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x}$

4) $y^{(5)} + y^{(3)} = 0$

$\lambda^5 + \lambda^3 = 0$

$\lambda^3(\lambda^2+1) = 0$

- $\lambda_{123} = 0 \rightarrow e^0 = 1, \quad xe^0 = x, \quad x^2e^0 = x^2$

  trojnásobný reálny koreň $\rightarrow$ první tri funkce z bodu a)

- $\lambda^2 + 1 = 0$

  $\lambda^2 = -1$

  $\lambda_{45} = \pm 1 \ \ldots\ \alpha = 0, \ \beta = 1 \rightarrow e^0 \cos x = \cos x$

  $e^0 \sin x = \sin x$

$\underline{y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 \cos x + c_5 \sin x}$

5) $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = 0$

$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \quad \ldots \quad \lambda^2 = t$

$t^2 + 8t + 16 = 0$

$(t+4)^2 = 0$

$t_{12} = -4$

$\lambda^2 = -4$

$\lambda = \pm 2i \ \ldots\ \alpha = 0, \ \beta = 2 \rightarrow e^0 \cos 2x = \cos 2x, \quad xe^0 \cos 2x = x\cos 2x$

$e^0 \sin 2x = \sin 2x, \quad xe^0 \sin 2x = x \sin 2x$

$\downarrow$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_{12} = 2i \\ \lambda_{34} = -2i \end{array}\right\}$ dvojice komplexně sdružených kořenů násobnosti 2 $\rightarrow$ prvni dve dvojice funkcí z bodu b)

$y = c_1 \cos 2x + c_2 x \cos 2x + c_3 \sin 2x + c_4 x \sin 2x$

$\underline{y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x}$

6) $4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 8, \quad y'(0) = 0$

1. $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$

$(2\lambda+1)^2 = 0$

$\lambda_{12} = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad e^{-\frac{1}{2}x}, \quad xe^{-\frac{1}{2}x}$

$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$

$\underline{\underline{y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x}}}$ … obecné řešení

2. $y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x} \quad \leftarrow \quad y(0) = 8$ … $x = 0, \ y = 8$

$y' = c_2 e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 x) e^{-\frac{1}{2}x} \quad \leftarrow \quad y'(0) = 0$ … $x = 0, \ y' = 0$

$8 = (c_1 + c_2 \cdot 0) \cdot e^0$

$0 = c_2 e^0 - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 \cdot 0) e^0$

$8 = c_1$

$0 = c_2 - \frac{1}{2} c_1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{2} c_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$ } dosadíme do obecného řešení

$y = (8 + 4x) e^{-\frac{1}{2}x}$

$\underline{\underline{y = 4(2 + x) e^{-\frac{1}{2}x}}}$ … partikulární řešení

7) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$

1. $\lambda^3 - \lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$

$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$

$\lambda_1 = 0 \rightarrow e^0 = 1$

$\lambda_2 = 1 \rightarrow e^x$

$\lambda_3 = -1 \rightarrow e^{-x}$

$\underline{y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x}}$

2. $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} \leftarrow y(0) = 3$

$y' = c_2 e^x - c_3 e^{-x} \leftarrow y'(0) = -1$

$y'' = c_2 e^x + c_3 e^{-x} \leftarrow y''(0) = 1$

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 + c_2 + c_3 \\ -1 &= c_2 - c_3 \\ 1 &= c_2 + c_3 \end{aligned}$$

+

$$\begin{aligned} 3 &= c_1 + c_2 + c_3 &\Rightarrow\quad & c_1 = 3 - c_2 - c_3 = 2 \\ -1 &= c_2 - c_3 &\Rightarrow\quad & c_3 = 1 + c_2 = 1 \\ 0 &= 2c_2 &\Rightarrow\quad & c_2 = 0 \end{aligned}$$

$\underline{y = 2 + e^{-x}}$