DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

EXAKTNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Diferenciální rovnice tvaru

(1) $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

se nazývá exaktní $\Leftrightarrow$

(2) $$M_y = N_x.$$

Obecné řešení exaktní diferenciální rovnice má tvar

$$f(x,y) = C,$$

kde C je libovolná konstanta a $f(x,y)$ je kmenová funkce, pro kterou platí:

(3) $$f'_x = M(x,y), \quad f'_y = N(x,y).$$

Pozn.: 1, Výraz $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ je totální diferenciál kmenové funkce $f(x,y)$.

2, Jistě jste si všimli, že
- vztah (1) připomíná křivkový integrál 2. druhu;
- vztah (2) připomíná podmínku pro nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě;
- vztah (3) připomíná podmínky pro potenciál (jen funkce jsou označeny jinými písmeny).

$\Rightarrow$ Při hledání kmenové funkce postupujeme stejně, jako při hledání potenciálu.

Př.: Ověřte, že dané diferenciální rovnice jsou exaktní a najděte jejich obecné řešení!

1) $\underbrace{(x+y+1)}_{M}dx + \underbrace{(x-y^2+3)}_{N}dy = 0$

1. $M(x,y) = x+y+1 \Rightarrow M_y = 0+1+0 = 1$
$N(x,y) = x-y^2+3 \Rightarrow N_x = 1-0+0 = 1$
$\Big\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rovnice je exaktní

2. $f'_x = M(x,y) \Rightarrow f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int (x+y+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + h(y)$

$f'_y = N(x,y) \Rightarrow [\frac{x^2}{2} + xy + x + h(y)]'_y = N(x,y)$

$0 + x + 0 + h'(y) = x - y^2 + 3$

$h'(y) = 3 - y^2$

$h(y) = \int (3-y^2)\,dy = 3y - \frac{y^3}{3}$ ⊛

$f(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y$

3. Obecné řešení: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y = C$, $C \in \mathbb{R}$

⊛ Konstantu nepřipočítáváme, protože kdyby

$h(y) = \int (3-y^2)\,dy = 3y - \frac{y^3}{3} + k$, pak $\rightarrow$

$\rightarrow$ obecné řešení: $\frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y + k = C' \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y = C' - k \rightarrow$

$\rightarrow$ označíme $C' - k = C \rightarrow$

$\rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^3}{3} + xy + x + 3y = C$

(k, C', C jsou libovolné konstanty.)

2) $(3ye^{3x} - 2x)dx + e^{3x}dy = 0$

1. $M(x,y) = 3ye^{3x} - 2x \quad \Rightarrow \quad M_y = 3e^{3x} - 0 = 3e^{3x}$
$N(x,y) = e^{3x} \quad \Rightarrow \quad N_x = e^{3x} \cdot 3 = 3e^{3x}$
$\Bigg\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Rovnice je exaktní!

2. $f'_y = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int N(x,y)\,dy = \int e^{3x}dy = ye^{3x} + g(x)$

$f'_x = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad [ye^{3x} + g(x)]'_x = M(x,y)$

$$3ye^{3x} + g'(x) = 3ye^{3x} - 2x$$
$$g'(x) = -2x$$
$$g(x) = \int(-2x)\,dx = -x^2$$

$f(x,y) = ye^{3x} - x^2$

3. Obecné řešení: $\underline{ye^{3x} - x^2 = C}$, $\quad C \in \mathbb{R}$

3) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

1. $M(x,y) = \dfrac{2x}{y^3} = 2xy^{-3} \quad \Rightarrow \quad M_y = 2x \cdot (-3)y^{-4} = -\dfrac{6x}{y^4}$
$N(x,y) = \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4} \quad \Rightarrow \quad N_x = \dfrac{0 - 6x}{y^4} = -\dfrac{6x}{y^4}$
$\Bigg\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow$ Rovnice je exaktní!

2. $f'_x = M(x,y) \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \int M(x,y)\,dx = \int \dfrac{2x}{y^3}dx = \dfrac{x^2}{y^3} + h(y)$

$f'_y = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \left[\dfrac{x^2}{y^3} + h(y)\right]'_y = N(x,y)$

$$x^2 \cdot (-3)y^{-4} + h'(y) = \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}$$
$$-\frac{3x^2}{y^4} + h'(y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}$$
$$h'(y) = \frac{1}{y^2}$$
$$h(y) = \int \frac{1}{y^2}dy = \int y^{-2}dy = \frac{y^{-1}}{-1} = -\frac{1}{y}$$

$f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y}$

3. Obecné řešení: $\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C \quad / \cdot y^3 \quad \rightarrow \quad \underline{x^2 - y^2 = Cy^3}$, $\quad C \in \mathbb{R}$