DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Lineární difererenciální rovnice 1. řádu má tvar

(1) $y' = a(x) \cdot y + b(x)$

Postup řešení se skládá ze dvou kroků:

Krok I.: Najdeme obecné řešení přidružené homogenní lineární diferenciální rovnice, tj. rovnice:

$y' = a(x) \cdot y$ ... separovaná rovnice

$\downarrow$

$\int \frac{1}{y} dy = \int a(x) dx$ ... Primitivní fci k $a(x)$ označíme $A(x)$.

$\ln|y| = A(x) + c_1$

$y = e^{A(x)+c_1} = e^{A(x)} \cdot e^{c_1}$, $e^{c_1} = c$

(2) $y = c e^{A(x)}$ ... obecné řešení přidružené HLDR

Krok II.: Metoda variace konstanty

- hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice (1):

→ místo konstanty c dosadíme do (2) funkci $c(x)$:

(3) $y = c(x) \cdot e^{A(x)}$

→ vztah (3) dosadíme do rovnice (1):

$[c(x) \cdot e^{A(x)}]' = a(x) \cdot c(x) \cdot e^{A(x)} + b(x)$

$c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot \underbrace{[e^{A(x)}]'}_{e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}} = a(x) \cdot c(x) \cdot e^{A(x)} + b(x)$

$c'(x) \cdot e^{A(x)} + c(x) \cdot e^{A(x)} \cdot a(x) = a(x) \cdot c(x) \cdot e^{A(x)} + b(x)$

- členy obsahující $c(x)$ se musí odečíst!

$$c'(x)\, e^{A(x)} = b(x)$$

$$c'(x) = \frac{b(x)}{e^{A(x)}} = b(x)\cdot e^{-A(x)}$$

$$c(x) = \int b(x)\cdot e^{-A(x)}\, dx$$ ... Primitivní fci k $b(x)\cdot e^{-A(x)}$ označíme $K(x)$.

(4) $$c(x) = K(x) + C$$

→ vztah (4) dosadíme do (3) a dostáváme obecné řešení rovnice (1):

(5) $$y = [K(x) + C]\, e^{A(x)}$$

Pozn.: Zpětným dosazením do vzorce (5) dostaneme vzorec pro přímý výpočet obecného řešení rovnice (1):

$$y = \left[C + \int b(x)\, e^{-\int a(x)dx}\, dx\right]\cdot e^{\int a(x)\,dx}.$$

Tento vzorec je však těžko zapamatovatelný, proto budeme při řešení lineární rovnice 1. řádu postupovat podle kroků I a II.

Př.: Najděte obecné, resp. partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ ... převedeme na tvar (1)

$$(1+x^2)y' = 2xy + (1+x^2)^2$$

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{a(x)} \cdot y + \underbrace{1+x^2}_{b(x)} \qquad (*)$$

① $y' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot y \quad \rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx}$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$\ln|y| = \ln(1+x^2) + c_1 = \ln|c_1(1+x^2)|$$

$$y = \pm c_1(1+x^2) \quad \ldots \quad \pm c_1 = c$$

$$\underline{y = c(1+x^2)}$$

② $y = c(x) \cdot (1+x^2)$ ... dosadíme do $(*)$

$$[c(x)\cdot(1+x^2)]' = \frac{2x}{1+x^2} \cdot c(x) \cdot (1+x^2) + 1+x^2$$

derivace součinu!

$$c'(x)\cdot(1+x^2) + c(x)\cdot 2x = c(x)\cdot 2x + 1+x^2$$

stejné výrazy na obou stranách rovnice – odečtou se (Výrazy s $c(x)$ musí z rovnice vypadnout; pokud se tak nestane, předcházející výpočet je chybně.)

$$c'(x)\cdot(1+x^2) = 1+x^2$$

$$c'(x) = 1$$

$$c(x) = \int dx = x + c$$

$$\underline{y = (1+x^2)(c+x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

2) $y' = \underbrace{2x}_{a(x)}y + \underbrace{6x}_{b(x)}$

① $y' = 2xy$

$\int \frac{1}{y} dy = \int 2x \, dx$

$\ln |y| = x^2 + c_1$

$|y| = e^{x^2 + c_1} = e^{x^2} \cdot e^{c_1}$ … $e^{c_1} = c_2$

$y = \pm c_2 e^{x^2}$ … $\pm c_2 = c$

$y = c e^{x^2}$

② $y = c(x) e^{x^2}$ …. dosadíme do zadání za y

$[c(x) \cdot e^{x^2}]' = 2x \cdot c(x) e^{x^2} + 6x$

$c'(x) \cdot e^{x^2} + c(x) \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} + 6x$

$c'(x) \cdot e^{x^2} = 6x$

$c'(x) = \frac{6x}{e^{x^2}} = 6x \cdot e^{-x^2}$

$c(x) = \int 6x e^{-x^2} dx = \left| \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \end{array} \right| = -3 \int e^t dt = -3e^t =$

$= \underbrace{-3e^{-x^2} + c}$

$y = (c - 3e^{-x^2}) \cdot e^{x^2}$ … roznásobíme

$y = c e^{x^2} - 3, \quad c \in \mathbb{R}$

3) $y' + 2y = 4x$

$$y' = \underbrace{-2}_{a(x)}y + \underbrace{4x}_{b(x)}$$

① $y' = -2y$

$$\int \frac{1}{y}dy = -2\int dx$$

$$\ln|y| = -2x + c_1$$

$$|y| = e^{-2x+c_1} = e^{-2x}\cdot e^{c_1} \quad \dots \quad e^{c_1} = c_2$$

$$y = \pm c_2 e^{-2x} \quad \dots \quad \pm c_2 = c$$

$$\underline{\underline{y = ce^{-2x}}}$$

② $y = c(x)\cdot e^{-2x}$

$$[c(x)\cdot e^{-2x}]' = -2c(x)e^{-2x} + 4x$$

$$c'(x)e^{-2x} + c(x)e^{-2x}\cdot(-2) = -2c(x)e^{-2x} + 4x$$

$$c'(x)e^{-2x} = 4x$$

$$c'(x) = \frac{4x}{e^{-2x}} = 4x\cdot e^{2x}$$

$$c(x) = \int 4xe^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = 4x & v' = e^{2x} \\ u' = 4 & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| = 2xe^{2x} - 2\int e^{2x}dx =$$

$$= 2xe^{2x} - e^{2x} + c$$

$$y = (2xe^{2x} - e^{2x} + c)\cdot e^{-2x}$$

$$\underline{\underline{y = ce^{-2x} + 2x - 1}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

4) $x^2y' = 2xy - 3, \quad y(-1) = 1$

$$y' = \underbrace{\frac{2}{x}}_{a(x)} \cdot y \underbrace{- \frac{3}{x^2}}_{b(x)}$$

1. $y' = \frac{2}{x} y$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c_1 = \ln x^2 + c_1 = \ln(c_1 x^2)$$

$$\ln|y| = \ln(c_1 x^2)$$

$$y = \pm c_1 x^2 \quad \dots \quad \pm c_1 = c$$

$$\underline{y = cx^2}$$

2. $y = c(x) \cdot x^2$

$$[c(x) \cdot x^2]' = \frac{2}{x} \cdot c(x) \cdot x^2 - \frac{3}{x^2}$$

$$c'(x) \cdot x^2 + c(x) \cdot 2x = 2x \cdot c(x) - \frac{3}{x^2}$$

$$c'(x) \cdot x^2 = -\frac{3}{x^2}$$

$$c'(x) = -\frac{3}{x^4} = -3x^{-4}$$

$$c(x) = -3\int x^{-4} dx = -3 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{x^3} + c$$

$$y = \left(\frac{1}{x^3} + c\right) \cdot x^2$$

$$\underline{y = cx^2 + \frac{1}{x}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. $y(-1) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = c(-1)^2 + \frac{1}{-1}$

$$1 = c - 1$$

$$c = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{y = 2x^2 + \frac{1}{x}}$$