DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

- Jedná se o diferenciální rovnici, u které lze proměnné x a y od sebe oddělit (separovat); má tvar:

(1) $y' = g(x) \cdot h(y)$ ... Rovnice může být zadaná i v jiném tvaru, vždy však lze převést na tvar (1), resp. (2).

Postup:

Rozepíšeme: $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$ $/ \cdot dx$ $/ : h(y)$ za předpokladu $h(y) \neq 0$

(2) $$\frac{dy}{h(y)} = g(x)\,dx$$ ... proměnné jsou úplně rozděleny

... dopíšeme integrační značky

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)\,dx$$ → vypočteme integrály na obou stranách rovnice

Primitivní funkce k funkcím $\frac{1}{h(y)}$ a $g(x)$ označíme $H(y)$ a $G(x)$.

→ Obecné řešení rce (1) má tvar:

(3) $H(y) = G(x) + C$, kde C je libovolná konstanta

Pozn.: 1. V (3) přičítáme konstantu jen k funkci $G(x)$, protože:

$$H(y) + c_1 = G(x) + c_2 \quad ; \quad c_1, c_2 \text{ - konstanty}$$
$$H(y) = G(x) + c_2 - c_1 \quad ; \quad c_2 - c_1 = C \text{ ... opět konstanta}$$
$$H(y) = G(x) + C$$

2. Pokud má rovnice $h(y) = 0$ řešení vyhovující rovnici (1), je třeba ho do obecného řešení rovněž začlenit.

3. Je-li to vhodné, z rovnice (3) vyjádříme proměnnou y.

Počáteční úloha:

K rovnici (1) přidáme podmínku

$$y(x_0) = y_0,$$

tj: hledáme řešení rovnice (1) procházející bodem $[x_0, y_0]$.

Postup: Do (3) za x dosadíme x_0 a za y dosadíme y_0 →

→ dostaneme konkrétní hodnotu pro konstantu C,

kterou dosadíme za C do (3) →

→ dostáváme partikulární řešení

Př.: Najděte obecné, resp. partikulární řešení daných diferenciálních rovnic.

1) $y' = y\cos x$

$\frac{dy}{dx} = y\cos x \quad /\cdot dx \quad /:y \quad \dots \quad y \neq 0$ *

$\int \frac{1}{y}dy = \int \cos x\, dx$

$\ln|y| = \sin x + c_1$ ... vyjádříme y: využijeme inverzní funkci k přirozenému logaritmu, což je exponenciální funkce o základu e ($e^{\ln x} = x$).

$e^{\ln|y|} = e^{\sin x + c_1}$

$|y| = e^{\sin x} \cdot e^{c_1}$ $\qquad e^{c_1} = c_2$ ... konstanta

odstraníme absolutní hodnotu

$y = \pm c_2 \cdot e^{\sin x}$ $\qquad \pm c_2 = c$ ... konstanta

$y = c e^{\sin x}, \quad \overbrace{c \in \mathbb{R}}^{*}$ ... obecné řešení

* Pro $y \neq 0$ musí být $c \neq 0$, ale $y = 0$ je rovněž řešení dané diferenciální rovnice, které dostaneme z $y = ce^{\sin x}$ pro $c = 0$. Proto $c \in \mathbb{R}$.

2) $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$

$/:\cos x, \quad /:\cos y$

$\int \frac{\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ $\quad /\cdot(-1)$

$\int \frac{-\sin y}{\cos y}dy = \int \frac{-\sin x}{\cos x}dx$ $\quad \dots \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|$

$\ln|\cos y| = \ln|\cos x| + c_1$ $\quad \dots \quad \ln x + \ln y = \ln(x\cdot y)$

$\ln|\cos y| = \ln(c_1|\cos x|)$ $\quad \dots \quad \ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$

$|\cos y| = c_1|\cos x|$

$\cos y = \pm c_1 \cdot \cos x$ $\quad \dots \quad \pm c_1 = c$

$\cos y = c\cos x, \quad c \in \mathbb{R}$ ... obecné řešení – ponecháme v tomto tvaru – je „hezčí" než tvar: $y = \arccos(c\cdot\cos x)$.

$y(0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4} = c\cdot\cos 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = c\cdot 1$

$c = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$ ... partikulární řešení

3) $x(1+y^2)dx - y(1+x^2)dy = 0, \quad y(-2) = 1$

$y(1+x^2)dy = x(1+y^2)dx \qquad /:(1+x^2) \quad /:(1+y^2)$

$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int \frac{x}{1+x^2}dx \qquad /\cdot 2$

$\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \int \frac{2x}{1+x^2}dx$

$\ln(1+y^2) = \ln(1+x^2) + c$ ... $1+x^2>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, $1+y^2>0 \ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $\Rightarrow$ v logaritmech není třeba absolutní hodnota

$\ln(1+y^2) = \ln c(1+x^2)$

$1+y^2 = c(1+x^2)$

$y^2 = c(1+x^2) - 1, \quad c \in \mathbb{R}$

$y(-2) = 1 \Rightarrow 1^2 = c(1+(-2)^2) - 1$

$1 = c(1+4) - 1$

$2 = 5c$

$c = \frac{2}{5}$

$y^2 = \frac{2}{5}(1+x^2) - 1$

$y^2 = \frac{2}{5} + \frac{2}{5}x^2 - 1$

$y^2 = \frac{2}{5}x^2 - \frac{3}{5}$

$y^2 = \frac{1}{5}(x^2 - 3)$

4) $y' = (2y+1)\cdot \operatorname{cotg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = (2y+1)\cdot\frac{\cos x}{\sin x} \qquad /\cdot dx \quad /:(2y+1)$

$\int \frac{1}{2y+1}dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$

$\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \ln|\sin x| + c_1 = \ln|c_1 \sin x|$

$\ln|2y+1| = 2\ln|c_1 \sin x| = \ln(c_1^2 \sin^2 x), \quad c_1^2 = c_2$

$2y+1 = c_2 \sin^2 x$

$2y = c_2 \sin^2 x - 1$

$y = \frac{1}{2}c_2 \sin^2 x - \frac{1}{2}$ ... $\frac{1}{2}c_2 = c$

$y = c\sin^2 x - \frac{1}{2}, \quad c \in \mathbb{R}$

$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = c\cdot\sin^2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

$1 = c\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$1 = \frac{2}{4}c$

$c = 2 \Rightarrow y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$

5) $(x+1)y' = xy \,, \quad y(0) = 3$

$$y' = \frac{xy}{x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{x}{x+1}\,dx \quad \dots \quad \int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = x - \ln|x+1|$$

$$\ln|y| = x - \ln|x+1| + c_1$$

$$e^{\ln|y|} = e^{x - \ln|x+1| + c_1} = e^x \cdot e^{\ln(x+1)^{-1}} \cdot e^{c_1} = c_2 \cdot e^x \cdot (x+1)^{-1}$$

$$|y| = c_2 e^x (x+1)^{-1}$$

$$y = \pm c_2 e^x (x+1)^{-1} \quad \dots \quad \pm c_2 = c$$

$$y = \frac{ce^x}{x+1} \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = \frac{c \cdot e^0}{0+1} \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3e^x}{x+1}$$

6) $y' = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x} \,, \quad y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx \quad \dots \quad \int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{1}{x} \\ dt = -\frac{1}{x^2}dx \end{array} \right| = -\int \cos t\,dt = -\sin t =$$

$$= -\sin\frac{1}{x}$$

$$y = c - \sin\frac{1}{x} \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = c - \sin\frac{1}{\frac{2}{\pi}}$$

$$2 = c - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$2 = c - 1$$

$$c = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 - \sin\frac{1}{x}$$

7) $y - y^2 + xy' = 0, \quad y(1) = \frac{1}{2}$

$$xy' = y^2 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-y}{x}$$

$$\int \frac{1}{y^2-y}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{y^2-y} = \frac{1}{y(y-1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y-1}$$

$$1 = Ay - A + By$$

$$y^1: \; 0 = A + B \quad \Rightarrow \quad B = -A = 1$$

$$y^0: \; \underline{1 = -A} \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

$$\int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\ln|y-1| - \ln|y| = \ln|x| + c$$

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|cx|$$

$$\frac{y-1}{y} = cx$$

$$1 - \frac{1}{y} = cx$$

$$\frac{1}{y} = 1 - cx$$

$$y(1-cx) = 1$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1-cx}}}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{1-c\cdot 1}$$

$$1 - c = 2$$

$$c = -1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{1-(-1)\cdot x}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{1}{1+x}}}$$