Využití vektorového počtu v analytické geometrii

Rovina v $\mathbb{E}_3$

1. Parametrická rovnice roviny: $\boldsymbol{X = A + t\vec{u} + s\vec{v}}$,
kde $t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Rozepsáno do souřadnic:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_A + tu_1 + sv_1} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_A + tu_2 + sv_2} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_A + tu_3 + sv_3} \end{aligned}$$

2. Obecná rovnice roviny: $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$,
kde a, b, c, jsou souřadnice normálového vektoru roviny ρ, tj. $\boldsymbol{\vec{n} = (a, b, c)}$.

Přímka v $\mathbb{E}_3$

1. Parametrická rovnice přímky: $\boldsymbol{X = A + t\vec{u}}$,
kde $t \in \mathbb{R}$ je parametr. Rozepsáno do souřadnic:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_A + tu_1} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_A + tu_2} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_A + tu_3} \end{aligned}$$

2. Přímka jako průsečnice dvou rovin:
směrový vektor $\vec{u}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

$$\boldsymbol{p :} \begin{cases} \boldsymbol{a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0} \\ \boldsymbol{a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0} \end{cases}$$

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
2. rovnoběžné různé $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$
3. různoběžné $\iff$ $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}$:

1. přímka p leží v rovině α $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
2. přímka p je rovnoběžná s rovinou α $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
3. přímka p je různoběžná s rovinou α $\iff$ $\vec{u} \not\perp \vec{n}$

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$
2. rovnoběžné různé $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
3. různoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$
4. mimoběžné $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$

Úlohy metrické

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ **dvou přímek** p**,** q je úhlem jejich směrových vektorů $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}}$$

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ **dvou rovin** α**,** β je úhlem jejich normálových vektorů $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$:

$$\boldsymbol{\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}}$$

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ **přímky** p **a roviny** α je doplňkem úhlu ψ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Protože $\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos\psi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \sin\varphi$, platí

$$\boldsymbol{\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}}$$

Nejkratší vzdálenost mimoběžek $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ je určena výškou rovnoběžnostěnu sestrojeného nad vektory $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$, $\overrightarrow{AB}$:

$$\boldsymbol{v = \frac{|[\vec{u}_p, \vec{u}_q, \overrightarrow{AB}]|}{\|\vec{u}_p \times \vec{u}_q\|}}$$