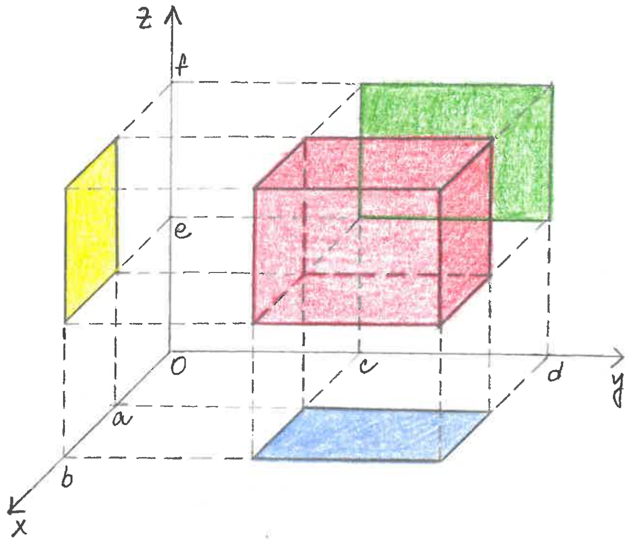
# TROJNÝ INTEGRÁL
## NA TROJROZMĚRNÉM INTERVALU

$\iiint\limits_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ ,     $W = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$

↳ Trojný integrál na množině $W$     ↳ Trojrozměrný interval




- Množina $W$
- Půdorys množiny $W$ – průmět do roviny $(x,y)$
- Nárys množiny $W$ – průmět do roviny $(x,z)$
- Bokorys množiny $W$ – průmět do roviny $(y,z)$

Množinu $W$ můžeme také zapsat:

$W:\ x \in \langle a,b\rangle,\quad y \in \langle c,d\rangle,\quad z \in \langle e,f\rangle$

nebo

$W:\ a \le x \le b,\quad c \le y \le d,\quad e \le z \le f$

Při výpočtu trojného integrálu na trojrozměrném intervalu nezáleží na pořadí integrace.

6 možností pořadí integrace:

- 1. podle $z$, 2. podle $y$, 3. podle $x$ ... nejčastější (*)
- 1. podle $z$, 2. podle $x$, 3. podle $y$
- 1. podle $y$, 2. podle $z$, 3. podle $x$
- 1. podle $y$, 2. podle $x$, 3. podle $z$
- 1. podle $x$, 2. podle $z$, 3. podle $y$
- 1. podle $x$, 2. podle $y$, 3. podle $z$

(*) $\iiint\limits_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[ \int_c^d \left[ \int_e^f f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx$

→ Trojnásobný integrál

1. Fci $f(x,y,z)$ integrujeme nejprve podle proměnné $z$ a na proměnné $x$ a $y$ se díváme jako na konstanty.

   Dosadíme meze za proměnnou $z$ → proměnná $z$ „zmizí" a dostaneme fci $g(x,y)$.

2. Fci $g(x,y)$ integrujeme podle proměnné $y$ a na proměnnou $x$ se díváme jako na konstantu.

   Dosadíme meze za proměnnou $y$ → proměnná $y$ „zmizí" a dostaneme fci $h(x)$.

3. Fci $h(x)$ integrujeme podle proměnné $x$ → po dosazení mezí za proměnnou $x$ dostaneme výsledek (reálné číslo).

Pro další možnosti pořadí integrace je postup při výpočtu obdobný jako u (*) – obrodťe sami.

Vždy musí platit:
- Při integraci podle některé proměnné se na zbylé proměnné díváme jako na konstanty.
- Během výpočtu proměnné postupně mizí; výsledkem je vždy reálné číslo.

Př.: Vypočtěte integrály na množině $W$.

1) $\iiint_W (x+y+z)\,dx\,dy\,dz =$ $\qquad W: 0\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 1$

$$= \int_0^3 \left[\int_0^2 \left[\int_0^1 (x+y+z)\,dz\right] dy\right] dx = \int_0^3 \left[\int_0^2 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2}\right]_0^1 dy\right] dx = \int_0^3 \left[\int_0^2 \left(x+y+\frac{1}{2}\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_0^3 \left[xy + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2}\right]_0^2 dx = \int_0^3 (2x+2+1)\,dx = \int_0^3 (2x+3)\,dx = \left[x^2+3x\right]_0^3 = 9+9 = \underline{\underline{18}}$$

2) $\iiint_W x^2 z \cos x\,dx\,dy\,dz =$ $\qquad W: 0\le x\le 2\pi,\ 0\le y\le 2,\ \frac{1}{2}\le z\le 1$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 z \cos x\,dz\right] dy\right] dx = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 x^2\cos x \left[\frac{z^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^1 dy\right] dx = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right) x^2 \cos x\,dy\right] dx =$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \left[y\right]_0^2 dx = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v' = \cos x \\ u' = 2x & v = \sin x \end{matrix} \right| = \frac{3}{4}\underbrace{\left[x^2 \sin x\right]_0^{2\pi}}_{=0} - \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} x \sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & v' = \sin x \\ u' = 1 & v = -\cos x \end{matrix} \right| = \frac{3}{2}\left[x\cos x\right]_0^{2\pi} - \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \frac{3}{2}2\pi \underbrace{\cos 2\pi}_{1} - \frac{3}{2}\underbrace{\left[\sin x\right]_0^{2\pi}}_{0} = \underline{\underline{3\pi}}$$

3) $\iiint_W 2z\,e^{3x+2y}\,dx\,dy\,dz =$ $\qquad W: 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le z\le 1$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \left[\int_0^1 2e^{3x+2y} z\,dz\right] dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{3x+2y} \left[z^2\right]_0^1 dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 e^{3x+2y}\,dy\right] dx \overset{*}{=}$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} e^{3x+2y}\right]_0^1 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{3x+2} - e^{3x}\right) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\left(e^{3x+2} - e^{3x}\right)\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6}\left(e^5 - e^3 - e^2 + 1\right) = \frac{1}{6}\left[e^3(e^2-1) - (e^2-1)\right] = \underline{\underline{\frac{1}{6}(e^2-1)(e^3-1)}}$$

$$* \int e^{3x+2y}\,dy = \left| \begin{matrix} t = 3x+2y \\ dt = 2dy \\ \frac{1}{2}dt = dy \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int e^t\,dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{3x+2y}$$

obdobně vypočteme i $\int e^{3x+2}\,dx$ a $\int e^{3x}\,dx$