TRANSFORMACE DVOJNÉHO INTEGRÁLU
DO ZOBECNĚNÝCH POLÁRNÍCH SOUŘADNIC

Zobecněné polární souřadnice

$x = ar\cos\varphi$ $\quad a, b \in \mathbb{R}^+$

$y = br\sin\varphi$

$J = abr$

Transformaci do zobecněných polárních souřadnic využíváme, je-li integrační obor ohraničen elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Určení mezí:

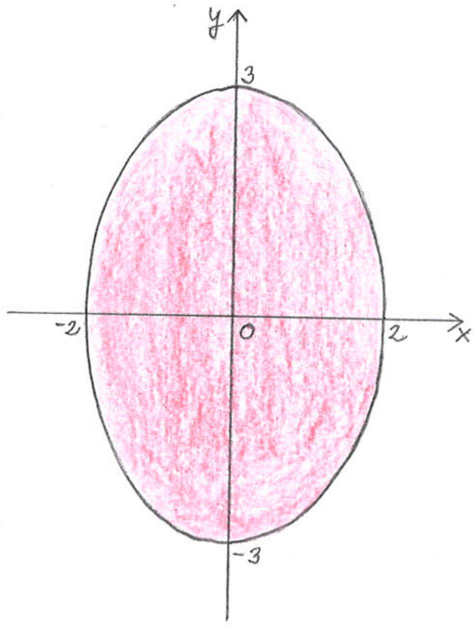
- $0 \leq r \leq 1$ VŽDY
- Meze pro φ určujeme stejně jako u polárních souřadnic.

Př.: Vypočtěte integrály s použitím transformace do zobecněných polárních souřadnic.

1) $\iint_D (9x^2+4y^2+4)\,dx\,dy =$

$D: 9x^2+4y^2 \le 36$

$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \le 1$



$a=2$, $b=3$ $\Rightarrow$ $x = 2r\cos\varphi$, $y = 3r\sin\varphi$, $|J| = 6r$ $\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 1$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (9\cdot 4r^2\cos^2\varphi + 4\cdot 9r^2\sin^2\varphi + 4)\,6r\,dr\right]d\varphi =$$

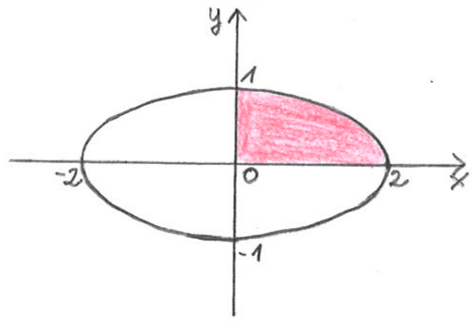
$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (36r^2+4)\cdot 6r\,dr\right]d\varphi = 24\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (9r^3+r)\,dr\right]d\varphi =$$

$$= 24\int_0^{2\pi}\left[\frac{9}{4}r^4+\frac{1}{2}r^2\right]_0^1 d\varphi = 24\int_0^{2\pi}\left(\frac{9}{4}+\frac{1}{2}\right)d\varphi =$$

$$= 24\cdot\frac{11}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi = 66\,[\varphi]_0^{2\pi} = \underline{\underline{132\pi}}$$

2) $\iint_D xy\,dx\,dy =$

$D: \frac{x^2}{4}+y^2 \le 1,\ x\ge 0,\ y \ge 0$



$a=2$, $b=1$ $\Rightarrow$ $x = 2r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|J| = 2r$ $\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le r \le 1$

$$= \int_0^1\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2r\cos\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot 2r\,d\varphi\right]dr =$$

$$= \int_0^1 2r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\right]dr = \int_0^1 2r^3\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d\varphi\right]dr =$$

$$= \int_0^1 2r^3\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}dr = \int_0^1 r^3(-\cos\pi+\cos 0)\,dr = \int_0^1 r^3(1+1)\,dr = 2\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$