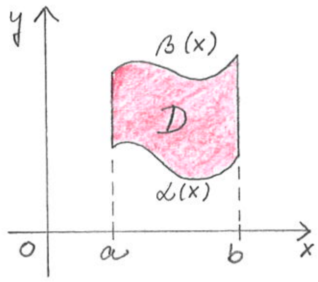
DVOJNÝ INTEGRÁL
NA OBLASTECH PRVNÍHO A DRUHÉHO DRUHU

- **Oblast I. druhu:**

$a \leq x \leq b$ ... vnější meze: „od čísla k číslu" (pevné)

$\alpha(x) \leq y \leq \beta(x)$ ... vnitřní meze: „od křivky ke křivce"



Jak poznáme oblast I. druhu:
- zhora a zdola je ohraničená vždy jen jednou křivkou (grafy funkcí proměnné x) – křivky $\alpha(x)$, $\beta(x)$
- zleva a zprava je ohraničená úsečkami rovnoběžnými s osou y (nebo průsečíkem křivek $\alpha(x)$ a $\beta(x)$) *

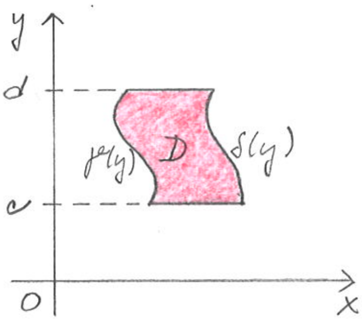
$$\rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \Big]\,dx$$

Pořadí integrace: 1. podle y, 2. podle x

- **Oblast II. druhu:**

$c \leq y \leq d$ ... vnější meze: „od čísla k číslu" (pevné)

$\gamma(y) \leq x \leq \delta(y)$ ... vnitřní meze: „od křivky ke křivce"

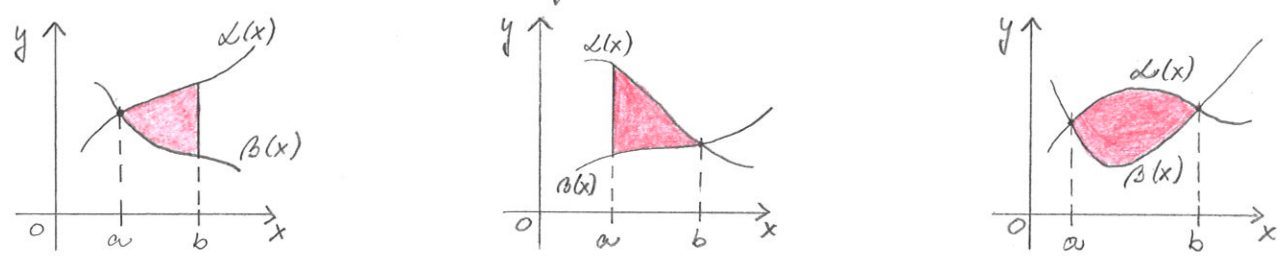


Jak poznáme oblast II. druhu:
- zleva a zprava je ohraničená vždy jen jednou křivkou (grafy funkcí proměnné y) – křivky $\gamma(y)$ a $\delta(y)$
- zhora a zdola je ohraničená úsečkami rovnoběžnými s osou x (nebo průsečíkem křivek $\gamma(y)$ a $\delta(y)$) *

$$\rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \Big[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \Big]\,dy$$

Pořadí integrace: 1. podle x, 2. podle y

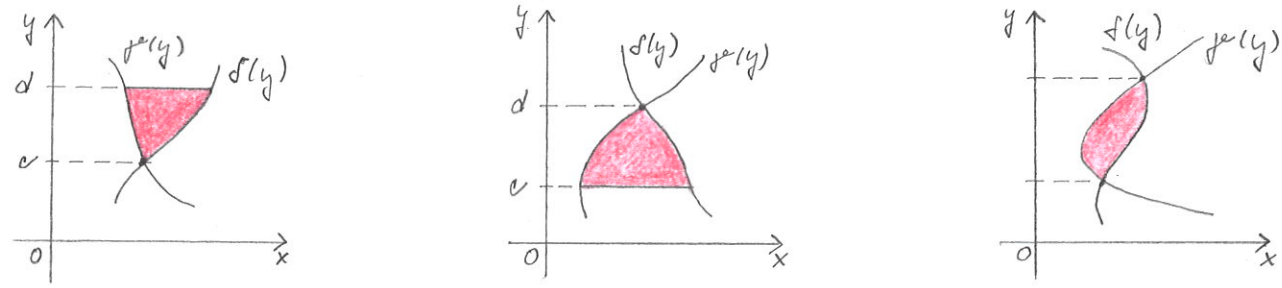
* Oblast I. druhu může vypadat například také takto:



→ Jedna nebo obě meze pro proměnnou x jsou x-ové souřadnice průsečíků křivek $y = \alpha(x)$ a $y = \beta(x)$. →

→ Dostaneme jako řešení rovnice $\alpha(x) = \beta(x)$.

Oblast II. druhu může vypadat například také takto:



→ Jedna nebo obě meze pro proměnnou y jsou y-ové souřadnice průsečíků křivek $x = \varphi(y)$ a $x = \delta(y)$. →

→ Dostaneme jako řešení rovnice $\varphi(y) = \delta(y)$.

Při výpočtu $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ musíme:

1) Množinu D nakreslit.
   - Množina D musí být vždy ohraničená.
   - Při jejím určování musíme využít všechny zadané podmínky či hraniční křivky; žádnou další podmínku či křivku nesmíme přidat.

2) Určit, zda množina D je oblast I. nebo II. druhu.

3) Určit meze pro proměnné x a y.
   - Vnější meze musí být vždy pevné!

Některé oblasti jsou I. i II. druhu → pořadí integrace můžeme zvolit.

Některé oblasti nejsou I. ani II. druhu → je třeba je rozdělit na více oblastí I. nebo II. druhu →
→ $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ je pak součet dvojných integrálů na těchto oblastech.

Př: Vypočtěte integrály $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$, je-li oblast D dána nerovnostmi nebo omezená danými křivkami.

1, $\iint\limits_D x\,dx\,dy =$ 　　　　$D:\ x \geq 0,\ y = 3 - x^2 + 2x,\ y = \frac{3}{2}x$

$y = -(x^2 - 2x) + 3$

$y = -(x-1)^2 + 4$

* $3 - x^2 + 2x = 0$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x+1)(x-3) = 0$

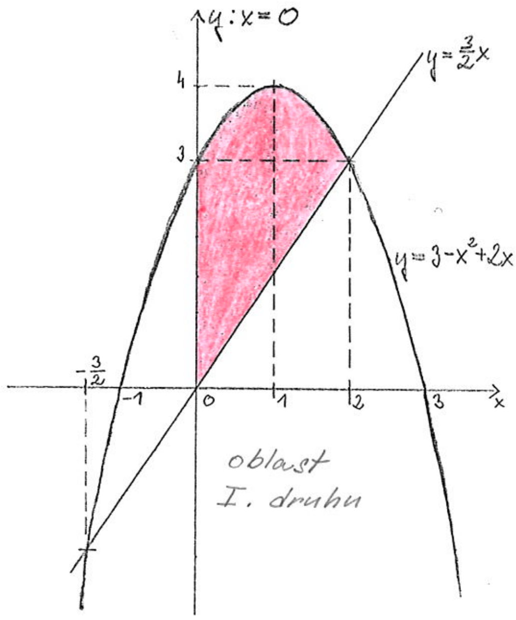
$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

* $3 - x^2 + 2x = \frac{3}{2}x$

$2x^2 - x - 6 = 0$

$D = 1 + 48 = 49$

$x_{12} = \frac{1 \pm 7}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2} \end{array} \right.$



$$= \int_0^2 \left[\int_{\frac{3}{2}x}^{3-x^2+2x} x\,dy \right] dx = \int_0^2 \left[xy \right]_{\frac{3}{2}x}^{3-x^2+2x} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(3x - x^3 + 2x^2 - \tfrac{3}{2}x^2\right) dx = \int_0^2 \left(3x - x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = 6 - 4 + \tfrac{4}{3} = \underline{\tfrac{10}{3}}$$

* Výpočet x-ových souřadnic průsečíků paraboly $y = 3 - x^2 + 2x$ a osy x.

* Výpočet x-ových souřadnic průsečíků paraboly $y = 3 - x^2 + 2x$ a přímky $y = \frac{3}{2}x$.

2, $\iint\limits_D e^x\,dx\,dy =$ 　　　　$D:\ 1 \leq y \leq 2,\ \ 0 \leq x \leq \ln y$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^{\ln y} e^x\,dx \right] dy = \int_1^2 \left[e^x \right]_0^{\ln y} dy = \int_1^2 \left(e^{\ln y} - e^0\right) dy =$$

$$= \int_1^2 (y-1)\,dy = \left[\tfrac{1}{2}y^2 - y \right]_1^2 = 2 - 2 - \tfrac{1}{2} + 1 = \underline{\tfrac{1}{2}}$$

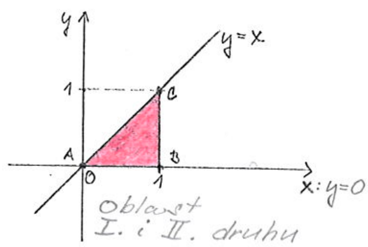
D je oblast II. druhu

Protože meze pro x a y jsou zadány, není třeba množinu D zakreslovat.

3, $\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy =$ 　　　　$D:\ \triangle ABC,\ A[0,0],\ B[1,0],\ C[1,1]$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^x (x^2 + y^2)\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \tfrac{1}{3}y^3 \right]_0^x dx = \int_0^1 \left(x^3 + \tfrac{1}{3}x^3\right) dx =$$

$$= \tfrac{4}{3} \int_0^1 x^3\,dx = \tfrac{4}{3} \left[\tfrac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \tfrac{1}{3} \left[x^4 \right]_0^1 = \underline{\tfrac{1}{3}}$$



Pozn.: 1, Množina D je ohraničena přímkami $y = 0,\ x = 1,\ y = x$.

2, Při výpočtu jsme množinu D brali jako oblast I. druhu. Sami proveďte výpočet budeme-li se na množinu D dívat jako na oblast II. druhu.

Sami vypočtěte následující integrály:
(Řešení najdete na dalších stranách.)

4) $\iint\limits_D (x-y)\,dx\,dy$, $D: y=0,\ y=x,\ x+y=2$

5) $\iint\limits_D (x^2-y)\,dx\,dy$, $D: y=x^2,\ y^2=x$

6) $\iint\limits_D (x^2-y)\,dx\,dy$, $D: y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x\geq 0$

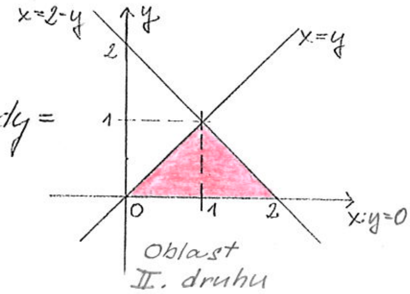
7) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy$, $D: x=2,\ y=x,\ xy=1$

8) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy$, $D: y=1,\ y=2,\ x=0,\ x=y^2$

9) $\iint\limits_D |x|e^{y}\,dx\,dy$, $D: y=x,\ y=x^2$

4) $\iint_D (x-y)\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ y=0,\ y=x,\ x+y=2$

$y = 2-x$
$x = 2-y$



$$= \int_0^1 \Big[\int_y^{2-y} (x-y)\,dx\Big]dy = \int_0^1 \Big[\frac{x^2}{2} - xy\Big]_y^{2-y} dy =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{(2-y)^2}{2} - (2-y)y - \frac{y^2}{2} + y^2\Big)dy = \int_0^1 \Big(\frac{4-4y+y^2}{2} - 2y + y^2 - \frac{y^2}{2} + y^2\Big)dy =$$

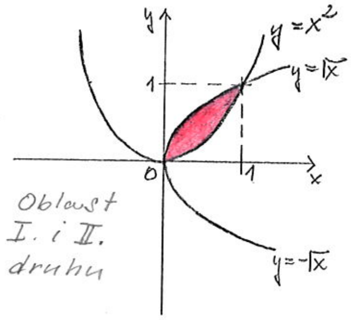
$$= \int_0^1 \Big(2 - 2y + \frac{y^2}{2} - 2y + 2y^2 - \frac{y^2}{2}\Big)dy = \int_0^1 (2 - 4y + 2y^2)\,dy =$$

$$= \Big[2y - 2y^2 + \frac{2}{3}y^3\Big]_0^1 = 2 - 2 + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

Pozn.: Průsečík přímek $x=y$ a $x=2-y$ je zřejmý. Pro výpočet jeho y-ové souřadnice použijeme rovnici $y = 2-y$.

5) $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ y=x^2,\ y^2=x$

$y = \pm\sqrt{x}$



$$= \int_0^1 \Big[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[x^2y + \frac{1}{2}y^2\Big]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - x^4 - \frac{1}{2}x^4\Big)dx = \int_0^1 \Big(x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^4\Big)dx =$$

$$= \Big[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{10}x^5\Big]_0^1 = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \underline{\underline{\frac{33}{140}}}$$

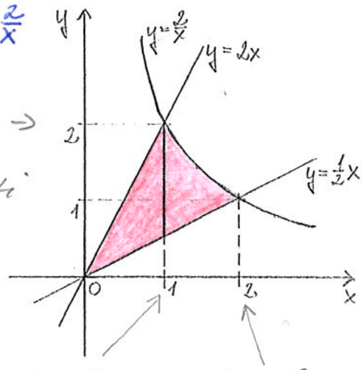
Pozn.: Víme, že paraboly $y=x^2$ a $x=y^2$ procházejí body $[0,0]$ a $[1,1]$. Průsečíky tedy není nutné počítat.

6) $\iint_D (x^2+y)\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2x,\ xy=2,\ x \geq 0$

hyperbola $\rightarrow y = \frac{2}{x}$

D není oblast I. ani II. druhu $\rightarrow$

$\rightarrow$ rozdělíme ji na dvě oblasti I. druhu.



$2x = \frac{2}{x}$ $\qquad \frac{1}{2}x = \frac{2}{x}$

$x^2 = 1$ $\qquad x^2 = 4$

$x = \pm 1$ $\qquad x = \pm 2$

$$= \int_0^1 \Big[\int_{\frac{x}{2}}^{2x} (x^2+y)\,dy\Big]dx + \int_1^2 \Big[\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} (x^2+y)\,dy\Big]dx =$$

$$= \int_0^1 \Big[x^2y + \frac{1}{2}y^2\Big]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx + \int_1^2 \Big[x^2y + \frac{1}{2}y^2\Big]_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(2x^3 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2\Big)dx + \int_1^2 \Big(2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{x^2} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2\Big)dx =$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{3}{2}x^3 + \frac{15}{8}x^2\Big)dx + \int_1^2 \Big(2x + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^2\Big)dx =$$

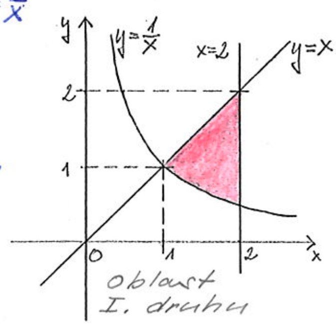
$$= \Big[\frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{8}x^3\Big]_0^1 + \Big[x^2 - \frac{2}{x} - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{24}x^3\Big]_1^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{8} + \frac{5}{8}}_{1} + \underbrace{4 - 1 - 2 - \frac{1}{3} - 1 + 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}}_{\frac{11}{6}} = \underline{\underline{\frac{17}{6}}}$$

Pozn.: D lze rozdělit i na dvě oblasti II. druhu – proveďte sami.

7) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}\,dx\,dy =$ $D: x=2,\ y=x,\ xy=1$

hyperbola $\rightarrow y=\frac{1}{x}$



$$= \int_1^2\left[\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}\,dy\right]dx = \int_1^2 x^2\left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{1}{x}}^{x}dx = \int_1^2 x^2\left(-\frac{1}{x}+x\right)dx =$$

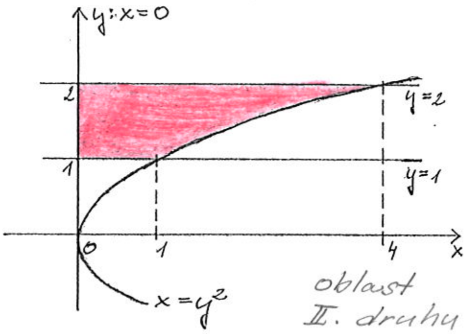
$x=\frac{1}{x}$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

$$= \int_1^2 (x^3-x)\,dx = \left[\tfrac{1}{4}x^4-\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 = 4-2-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2} = \underline{\underline{\tfrac{9}{4}}}$$

8) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dx\,dy =$ $D: y=1,\ y=2,\ x=0,\ x=y^2$



$$= \int_1^2\left[\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,dx\right]dy \overset{*}{=} \int_1^2\left[y\,e^{\frac{x}{y}}\right]_0^{y^2}dy = ⊛$$

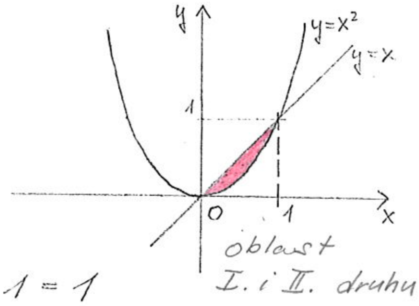
$$\left\{ * = \left|\begin{array}{l} t=\frac{x}{y} \\ dt=\frac{dx}{y} \\ dx=y\,dt \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & y^2 \\ \hline t & 0 & y \end{array}\right| = \int_1^2\left[\int_0^y y\,e^t\,dt\right]dy = \int_1^2 y\left[e^t\right]_0^y dy = ⊛ \right\}$$

$$⊛ = \int_1^2 y(e^y-1)\,dy = \int_1^2 y e^y\,dy - \int_1^2 y\,dy = \left|\begin{array}{ll} u=y & v'=e^y \\ u'=1 & v=e^y \end{array}\right| = \left[ye^y\right]_1^2 - \int_1^2 e^y\,dy - \int_1^2 y\,dy =$$

$$= \left[ye^y\right]_1^2 - \left[e^y\right]_1^2 - \left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e - 2 + \tfrac{1}{2} = \underline{\underline{e^2-\tfrac{3}{2}}}$$

9) $\iint\limits_D |x|\,e^y\,dx\,dy$ $D: y=x,\ y=x^2$

$x\geq 0 \Rightarrow |x|=x$



$$= \int_0^1\left[\int_{x^2}^{x} x\,e^y\,dy\right]dx = \int_0^1 x\left[e^y\right]_{x^2}^{x}dx = \int_0^1 x e^x\,dx - \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = ⊛$$

$$\int_0^1 x e^x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u=x & v'=e^x \\ u'=1 & v=e^x \end{array}\right| = \left[xe^x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = e-e+1 = 1$$

$$\int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} t=x^2 \\ dt=2x\,dx \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & 1 \end{array}\right| = \tfrac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt = \tfrac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1 = \tfrac{1}{2}(e-1)$$

$$⊛ = 1-\tfrac{1}{2}(e-1) = \underline{\underline{\frac{3-e}{2}}}$$

V příkladech 5, 6 a 9 jsme zvolili integraci přes oblast I. druhu. Spočítejte tyto příklady i přes oblasti II. druhu.