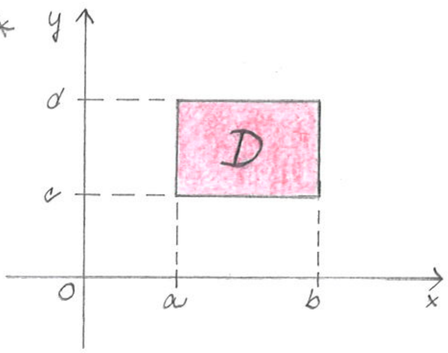
DVOJNÝ INTEGRÁL
NA DVOJROZMĚRNÉM INTERVALU

$\underbrace{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{Dvojný integrál na množině } D}$, $D = \underbrace{\langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle}_{\text{Dvojrozměrný interval *}}$

*



Množinu D můžeme také zapsat:

$D:\ x \in \langle a,b\rangle,\ y \in \langle c,d\rangle$

nebo

$D:\ a \le x \le b,\ c \le y \le d$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \underbrace{\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy}_{\text{Dvojnásobný integrál}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Při výpočtu dvojného integrálu na dvojrozměrném intervalu nezáleží na pořadí integrace.

Postup při výpočtu dvojnásobných integrálů:

- $\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$

  1. fci $f(x,y)$ nejprve integrujeme podle proměnné y a na proměnnou x se díváme jako na konstantu dosadíme meze za y $\rightarrow$ proměnná y „zmizí" a dostaneme fci $g(x)$ jedné proměnné x
  2. vypočteme integrál $\int_a^b g(x)\,dx$, tj: integrujeme podle x

- $\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$

  1. fci $f(x,y)$ nejprve integrujeme podle proměnné x a na proměnnou y se díváme jako na konstantu dosadíme meze za x $\rightarrow$ proměnná x „zmizí" a dostaneme fci $h(y)$
  2. vypočteme integrál $\int_c^d h(y)\,dy$, tj: integrujeme podle y

Př: 1) $\iint_D (x^2-xy+y^3-1)\,dx\,dy = *$, $\quad D: 0 \le x \le 3, \ 1 \le y \le 2$

I. zp.: Zvolíme pořadí integrace první podle y, pak podle x

$$* = \int_0^3 \left[\int_1^2 (x^2-xy+y^3-1)\,dy\right] dx = \int_0^3 \left[x^2y - x\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - y\right]_1^2 dx =$$

$$= \int_0^3 \left(2x^2 - 2x + 4 - 2 - x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + 1\right) dx = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{4} + \frac{11x}{4}\right]_0^3 = 9 - \frac{27}{4} + \frac{33}{4} = 9 + \frac{6}{4} = \underline{\underline{\frac{21}{2}}}$$

II. zp.: Zvolíme pořadí integrace první podle x, pak podle y

$$* = \int_1^2 \left[\int_0^3 (x^2-xy+y^3-1)\,dx\right] dy = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y + xy^3 - x\right]_0^3 dy =$$

$$= \int_1^2 \left(9 - \frac{9}{2}y + 3y^3 - 3\right) dy = \int_1^2 \left(3y^3 - \frac{9}{2}y + 6\right) dy = \left[\frac{3y^4}{4} - \frac{9y^2}{4} + 6y\right]_1^2 =$$

$$= 12 - 9 + 12 - \frac{3}{4} + \frac{9}{4} - 6 = 9 + \frac{6}{4} = \underline{\underline{\frac{21}{2}}}$$

2) $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dx\,dy =$ $\quad D = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^1 \underbrace{\frac{x^2}{1+y^2}}_{x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2}} dy\right] dx = \int_0^1 x^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy\right] dx = \int_0^1 x^2 \left[\operatorname{arctg} y\right]_0^1 dx =$$

→ konstanta – lze vytknout před integrál

$$= \int_0^1 x^2 (\underbrace{\operatorname{arctg} 1}_{\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{0})\,dx = \frac{\pi}{4}\int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$$

Pozn: Zvolili jsme pořadí integrace: 1. podle y, 2. podle x.
Sami si příklad spočítejte s opačným pořadím integrace.

3) $\iint_D \sin(2x+y)\,dx\,dy =$ $\quad D: x \in \langle 0, \pi\rangle, \ y \in \langle \frac{\pi}{4}, \pi\rangle$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(2x+y)\,dx\right] dy = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \left[-\frac{1}{2}\cos(2x+y)\right]_0^{\pi} dy =$$

$$\to = \left| \begin{array}{l} t = 2x+y \\ dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{1}{2}\cos(2x+y)$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\underbrace{\cos(2\pi+y)}_{=\cos y} - \cos y)\,dy = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\cos y - \cos y)\,dy = -\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} 0\,dy = \underline{\underline{0}}$$

Pozn: Pořadí integrace: 1. podle x, 2. podle y.
Sami si příklad spočítejte s opačným pořadím integrace.

Následující příklady vypočtete sami; řešení najdete na další straně.

4) $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy$, $\quad D:\ 3 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$

5) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$, $\quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2$

6) $\iint\limits_D \ln(1+x)^{2y}\,dx\,dy$, $\quad D:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$

7) $\iint\limits_D xy^2 e^{xy}\,dx\,dy$, $\quad D:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$

4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x+y)^2}\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ 3\le x\le 4,\quad 1\le y\le 2$

$$= \int_3^4 \Big[\underbrace{\int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2}\,dy}_{*}\Big]dx = \int_3^4 \Big[-\frac{1}{x+y}\Big]_1^2 dx = \int_3^4 \Big(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\Big)dx =$$

$$= \big[-\ln|x+2| + \ln|x+1|\big]_3^4 = -\ln 6 + \ln 5 + \ln 5 - \ln 4 = \underline{\ln\frac{25}{24}}$$

$$* \int (x+y)^{-2}\,dy = \left|\begin{array}{l} t = x+y \\ dt = dy \end{array}\right| = \int t^{-2}\,dt = \frac{t^{-1}}{-1} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x+y}$$

5) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 2$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^2 e^{x+y}\,dy\Big]dx = \int_0^1 \big[e^{x+y}\big]_0^2 dx = \int_0^1 (e^{x+2} - e^x)\,dx = \big[e^{x+2} - e^x\big]_0^1 =$$

$$= e^3 - e - e^2 + 1 = e^2(e-1) - (e-1) = \underline{(e-1)(e^2-1)}$$

6) $\displaystyle\iint_D \ln(1+x)^{2y}\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ 0\le x\le 1,\quad 0\le y\le 1$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^1 \ln(1+x)^{2y}\,dy\Big]dx = \int_0^1 \Big[\int_0^1 2y\ln(1+x)\,dy\Big]dx = \int_0^1 \big[y^2\big]_0^1 \ln(1+x)\,dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx =$$

$$= \left|\begin{array}{ll} u = \ln(1+x) & v' = 1 \\ u' = \frac{1}{1+x} & v = x \end{array}\right| = \big[x\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x}\,dx = \big[x\ln(1+x)\big]_0^1 - \int_0^1 \Big(1-\frac{1}{1+x}\Big)dx =$$

$$= \big[x\ln(1+x)\big]_0^1 - \big[x - \ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - 1 + \ln 2 = \underline{2\ln 2 - 1}$$

7) $\displaystyle\iint_D xy^2 e^{xy}\,dx\,dy =$ $\qquad D:\ 0\le x\le 2,\quad 0\le y\le 1$

$$= \int_0^1 \Big[\int_0^2 xy^2 e^{xy}\,dx\Big]dy = \left|\begin{array}{ll} u = xy^2 & v' = e^{xy} \\ u' = y^2 & v = \frac{1}{y}e^{xy} \end{array}\right| = \int_0^1 \Big(\big[xye^{xy}\big]_0^2 - \int_0^2 ye^{xy}\,dx\Big)dy =$$

$$= \int_0^1 \big[xye^{xy} - e^{xy}\big]_0^2 dy = \int_0^1 (2ye^{2y} - e^{2y} + 1)\,dy = \left|\begin{array}{ll} u = 2y & v' = e^{2y} \\ u' = 2 & v = \frac{1}{2}e^{2y} \end{array}\right| =$$

$$= \Big[ye^{2y} - \frac{1}{2}e^{2y} - \frac{1}{2}e^{2y} + y\Big]_0^1 = \big[ye^{2y} - e^{2y} + y\big]_0^1 = e^2 - e^2 + 1 + 1 = \underline{2}$$

Sami si předchozí příklady spočítejte s opačným pořadím integrace.