

BAA001 Matematika I

8. Analytická geometrie

8.1 Rovina v \mathbb{E}_3

8.2 Přímka v \mathbb{E}_3

8.3 Dvě přímky

8.4 Přímka a rovina

8.5 Dvě roviny

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Zápis

$$\rho = [A; \vec{u}; \vec{v}]$$

značí, že rovina ρ je v prostoru \mathbb{E}_3 určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrické vyjádření roviny

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}$$

$t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry.

Rozepsáno do souřadnic

$$x = x_A + tu_1 + sv_1$$

$$y = y_A + tu_2 + sv_2$$

$$z = z_A + tu_3 + sv_3$$

2. Obecná rovnice roviny

$$ax + by + cz + d = 0$$

Koeficienty a, b, c , jsou souřadnice **normálového vektoru** roviny ρ , tj.

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

kde vektor $\vec{n} \perp \rho$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

3. Úsekový tvar roviny

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1$$

p, q, r jsou nenulová čísla nazývaná úseky na osách.

Body $P = [p, 0, 0]$, $Q = [0, q, 0]$, $R = [0, 0, r]$ jsou průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami x, y, z .

Příklad

Určete obecnou rovnici roviny α .

$$\alpha : x = 2 + 3t - 4s$$

$$y = 4 - s$$

$$z = 2 + 3t$$

Zápis

$$p = [A; \vec{u}]$$

značí, že přímka p je v prostoru \mathbb{E}_3 určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a **směrovým vektorem** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}$ jsou kolineární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrické vyjádření přímky

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + t\vec{u}$$

$t \in \mathbb{R}$ je parametr.

Rozepsáno do souřadnic

$$x = x_A + tu_1$$

$$y = y_A + tu_2$$

$$z = z_A + tu_3$$

2. Obecná rovnice přímky

Často je **přímka** zadána jako **průsečnice dvou rovin**

$$p : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$$

které nejsou rovnoběžné nebo totožné. To je splněno, když normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ rovin nejsou kolineární.

Směrový vektor \vec{u} přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Příklad

Určete parametrické vyjádření přímky p .

$$p : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. **rovnoběžné totožné** $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = p = q$

2. **rovnoběžné různé** $\iff \vec{u}_p = k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
→ Určujeme vzdálenost rovnoběžek.

3. **různoběžné** $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \{R\}$
→ Určujeme úhel a průsečík různoběžek.

4. **mimoběžné** $\iff \vec{u}_p \neq k\vec{u}_q$ a $p \cap q = \emptyset$
→ Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Úhel dvou přímek

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímek p, q je úhlem jejich směrových vektorů \vec{u}_p, \vec{u}_q .

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q .

a) $p \equiv \{x = 2 + 3t, y = -1 + 4t, z = 2t\}$

$$q \equiv \{x = 7 + 3s, y = 1 + 4s, z = 3 + 2s\}$$

b) $p \equiv \{x = -1 + 3t, y = -7 + 2t, z = 4 - t\}$

$$q \equiv \{x = 2 + 3s, y = -5 - 2s, z = 3 - s\}$$

c) $p \equiv \{x = t - 1, y = t, z = 2t + 1\}$

$$q \equiv \{x = s, y = 3s - 1, z = 4s + 2\}$$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem \vec{n} :

- 1. přímka p leží v rovině α** $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
- 2. přímka p je rovnoběžná s rovinou α** $\iff \vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
 \rightarrow Určujeme vzdálenost přímky a roviny.
- 3. přímka p je různoběžná s rovinou α** $\iff \vec{u} \not\perp \vec{n}$
 \rightarrow Určujeme úhel a průsečík přímky a roviny.

Úhel přímky a roviny

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímky p a roviny α je doplňkem úhlu ψ směřového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Protože

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \psi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \sin \varphi,$$

platí

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α .

$$p \equiv \{x = 1 + t, y = -1 - 2t, z = 6t\}$$

$$\alpha : 2x + 3y + z - 1 = 0$$

Příklad

Je dán bod $M = [-2, 0, 8]$ a rovina $\rho : -x - y + 2z = 0$. Určete

- kolmý průmět bodu M do roviny ρ ,
- vzdálenost bodu M od roviny ρ .

Příklad

Je dán bod $M = [7, -3, 3]$ a přímka $p \equiv \{x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = -3 + 2t\}$. Určete

- kolmý průmět bodu M na přímku p ,
- vzdálenost bodu M od přímky p .

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$ jsou:

1. rovnoběžné totožné $\iff \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

2. rovnoběžné různé $\iff \vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$

→ Určujeme vzdálenost rovin.

3. různoběžné $\iff \vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$

→ Určujeme úhel a průsečnici rovin.

Úhel dvou rovin

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rovin α, β je úhlem jejich normálových vektorů $\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta$.

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

Příklad

Určete vzájemnou polohu dvou rovin α, β .

a) $\alpha : 4x + 2y - 4z + 5 = 0$

$$\beta : 2x + y + 2z - 1 = 0$$

b) $\alpha : x - 3z + 2 = 0$

$$\beta : 2x - 6z - 7 = 0$$

**DĚKUJI
ZA
POZORNOST!**