FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

8. Analytická geometrie

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.

[3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I*$_6$, *Analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 1995. ISBN: 80-241-0602-X

8.1 Rovina v $\mathbb{E}_3$

Zápis

$$\boldsymbol{\rho = [A; \vec{u}; \vec{v}]}$$

značí, že rovina ρ je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a dvěma nekolineárními vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

8.1 Rovina v $\mathbb{E}_3$

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in \rho \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}, \vec{v}$ jsou komplanární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u} + s\vec{v}, \qquad t, s \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrické vyjádření roviny

$$\boldsymbol{X = A + t\vec{u} + s\vec{v}}$$

$t, s \in \mathbb{R}$ jsou parametry.
Rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_A + tu_1 + sv_1} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_A + tu_2 + sv_2} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_A + tu_3 + sv_3} \end{aligned}$$

2. Obecná rovnice roviny

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

Koeficienty a, b, c, jsou souřadnice **normálového vektoru** roviny ρ, tj.

$$\boldsymbol{\vec{n} = (a, b, c)}$$

kde vektor $\vec{n} \perp \rho$ je kolineární s vektorem $\vec{u} \times \vec{v}$.

3. Úsekový tvar roviny

$$\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1}$$

p, q, r jsou nenulová čísla nazývaná úseky na osách.

Body $P = [p, 0, 0]$, $Q = [0, q, 0]$, $R = [0, 0, r]$ jsou průsečíky roviny ρ se souřadnicovými osami x, y, z.

Příklad 8.1

Určete obecnou rovnici roviny α.

$$\begin{aligned} \alpha : x &= 2 + 3t - 4s \\ y &= 4 \qquad\; - s \\ z &= 2 + 3t \end{aligned}$$

Příklad 8.2

Určete obecnou rovnici roviny $\alpha = ABC$;
$A = [1, -2, 0]$, $B = [2, 3, 1]$, $C = [2, 1, -1]$.

Zápis

$$\boldsymbol{p = [A; \vec{u}]}$$

značí, že přímka p je v prostoru $\mathbb{E}_3$ určena bodem $A = [x_A, y_A, z_A]$ a **směrovým vektorem** $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Libovolný bod $X = [x, y, z] \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{AX}, \vec{u}$ jsou kolineární, tj.

$$\overrightarrow{AX} = t\vec{u}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1. Parametrické vyjádření přímky

$$\boldsymbol{X = A + t\vec{u}}$$

$t \in \mathbb{R}$ je parametr.
Rozepsáno do souřadnic

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{x_A + tu_1} \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y_A + tu_2} \\ \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z_A + tu_3} \end{aligned}$$

2. Obecná rovnice přímky

Často je **přímka** zadána **jako průsečnice dvou rovin**

$$\boldsymbol{p : \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}}$$

které nejsou rovnoběžné nebo totožné. To je splněno, když normálové vektory $\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ rovin nejsou kolineární.

Směrový vektor $\vec{u}$ přímky je kolineární s vektorem $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

Příklad 8.3

Určete parametrické vyjádření přímky p.

$$p : \begin{cases} x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Vzájemná poloha dvou přímek

Přímky $p = [A; \vec{u}_p]$, $q = [B; \vec{u}_q]$ jsou:

1. **rovnoběžné totožné** $\iff$ $\boldsymbol{\vec{u}_p = k\vec{u}_q}$ a $\boldsymbol{p \cap q = p = q}$
2. **rovnoběžné různé** $\iff$ $\boldsymbol{\vec{u}_p = k\vec{u}_q}$ a $\boldsymbol{p \cap q = \emptyset}$
   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost rovnoběžek.
3. **různoběžné** $\iff$ $\boldsymbol{\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q}$ a $\boldsymbol{p \cap q = \{R\}}$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečík různoběžek.
4. **mimoběžné** $\iff$ $\boldsymbol{\vec{u}_p \neq k\vec{u}_q}$ a $\boldsymbol{p \cap q = \emptyset}$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel mimoběžek a jejich nejkratší vzdálenost.

Úhel dvou přímek

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímek p, q je úhlem jejich směrových vektorů $\vec{u}_p$, $\vec{u}_q$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{u}_p \cdot \vec{u}_q|}{\|\vec{u}_p\| \cdot \|\vec{u}_q\|}$$

Příklad 8.4 !

Určete vzájemnou polohu dvou přímek p, q.
– V případě rovnoběžek určete jejich vzdálenost.
– V případě různoběžek určete jejich průsečík a úhel.
– V případě mimoběžek určete jejich nejkratší vzdálenost a úhel.

a) $p \equiv AB,\ A = [2, 1, 7],\ B = [-4, -7, 9]$
$q \equiv \{x = 1 + 3t,\ y = 8 + 4t,\ z = 6 - t\}$

b) $p \equiv \{x = -1 + 3t,\ y = -7 + 2t,\ z = 4 - t\}$
$q \equiv \{x = 2 + 3s,\ y = -5 - 2s,\ z = 3 - s\}$

c) $p \equiv \{x = t - 1,\ y = t,\ z = 2t + 1\}$
$q \equiv \{x = s,\ y = 3s - 1,\ z = 4s + 2\}$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Přímka $p = [A; \vec{u}]$ a rovina $\alpha : ax + by + cz + d = 0$ s normálovým vektorem $\vec{n}$:

1. **přímka p leží v rovině α** $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = p$
2. **přímka p je rovnoběžná s rovinou α** $\iff$ $\vec{u} \perp \vec{n}$ a $p \cap \alpha = \emptyset$
   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost přímky a roviny.
3. **přímka p je různoběžná s rovinou α** $\iff$ $\vec{u} \not\perp \vec{n}$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečík přímky a roviny.

Úhel přímky a roviny

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ přímky p a roviny α je doplňkem úhlu ψ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny do $\frac{\pi}{2}$, tj. $\varphi = \frac{\pi}{2} - \psi$.

Protože

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos\psi = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \sin\varphi,$$

platí

$$\sin\varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{n}\|}$$

Příklad 8.5

Určete vzájemnou polohu přímky p a roviny α.
– V případě rovnoběžnosti určete jejich vzdálenost.
– V případě různoběžnosti určete jejich průsečík a úhel.

$p \equiv \{x = 1 + t,\ y = -1 - 2t,\ z = 6t\}$
$\alpha : 2x + 3y + z - 1 = 0$

Příklad 8.6 !

Je dán bod $M = [-2, 0, 8]$ a rovina $\rho : -x - y + 2z = 0$. Určete

a) kolmý průmět bodu M do roviny ρ,
b) vzdálenost bodu M od roviny ρ.

Příklad 8.7 !

Je dán bod $M = [7, -3, 3]$ a přímka $p \equiv \{x = 1 + t,\ y = -3 + 2t,\ z = -3 + 2t\}$. Určete

a) kolmý průmět bodu M na přímku p,
b) vzdálenost bodu M od přímky p.

Vzájemná poloha dvou rovin

Roviny α a β s normálovými vektory $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$ jsou:

1. **rovnoběžné totožné** $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$
2. **rovnoběžné různé** $\iff$ $\vec{n}_\alpha = k\vec{n}_\beta$ a $\alpha \cap \beta = \emptyset$
   $\rightarrow$ Určujeme vzdálenost rovin.
3. **různoběžné** $\iff$ $\vec{n}_\alpha \neq k\vec{n}_\beta$
   $\rightarrow$ Určujeme úhel a průsečnici rovin.

Úhel dvou rovin

Úhel $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ rovin α, β je úhlem jejich normálových vektorů $\vec{n}_\alpha$, $\vec{n}_\beta$.

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{\|\vec{n}_\alpha\| \cdot \|\vec{n}_\beta\|}$$

Příklad 8.8

Určete vzájemnou polohu dvou rovin α, β.
– V případě rovnoběžných rovin určete jejich vzdálenost.
– V případě různoběžých rovin určete jejich průsečnici a úhel.

a) $\alpha : 4x + 2y - 4z + 5 = 0$
$\beta : 2x + y + 2z - 1 = 0$

b) $\alpha : x - 3z + 2 = 0$
$\beta : 2x - 6z - 7 = 0$