

BAA001 Matematika I

7. Vektorový počet

- 7.4 Skalární součin vektorů
- 7.5 Vektorový součin vektorů
- 7.6 Smíšený součin vektorů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

- [1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6
- [2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.
- [3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I₅, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2

Definice

Skalárním součinem nenulových vektorů \vec{u}, \vec{v} rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů \vec{u}, \vec{v} a $\|\vec{u}\|, \|\vec{v}\|$ jsou jejich délky. Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Platí

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o})$

Využití

- Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

- Výpočet délky nenulového vektoru:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

- Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$$

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3), A = [a_1, a_2, a_3], B = [b_1, b_2, b_3]$$

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

- Délka úsečky AB :

$$|AB| = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Příklad 7.3

Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory \vec{a}, \vec{b} byly ortogonální.

$$\vec{a} = (2, -1, k), \vec{b} = (5, 4, 2)$$

Příklad 7.4

Určete úhel vektorů \vec{a}, \vec{b} .

$$\vec{a} = (2, 1, 2), \vec{b} = (0, 1, 1)$$

Definice

Vektorovým součinem vektorů \vec{u}, \vec{v} rozumíme vektor označovaný $\vec{u} \times \vec{v}$.

- Je-li alespoň jeden z vektorů \vec{u}, \vec{v} nulový nebo jsou-li vektory \vec{u}, \vec{v} kolineární, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.
- V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ následující vlastnosti:
 1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům \vec{u}, \vec{v} .
 2. Vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).
 3. Délka vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory \vec{u}, \vec{v} , tj.

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů \vec{u}, \vec{v} .

Platí

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

Pozor!

- $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u},$
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}),$
- Neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \Rightarrow (\vec{u} = \vec{o} \text{ nebo } \vec{v} = \vec{o}).$

Využití

- Vyšetřování kolinearit nenulových vektorů \vec{u}, \vec{v} :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory \vec{u}, \vec{v} :

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory \vec{u}, \vec{v} :

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

Výpočet

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.

Příklad 7.5



Jsou dány vektory \vec{a}, \vec{b} .

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$$

- Rozhodněte, zda jsou vektory \vec{a}, \vec{b} kolineární.
- Vypočtete obsah rovnoběžníku určeného vektory \vec{a}, \vec{b} .
- Určete vektor \vec{x} kolmý k vektorům \vec{a}, \vec{b} délky 15.
- Určete vektor $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ kolmý k vektorům \vec{a}, \vec{b} takový, že $2y_1 + 3y_2 + y_3 = 12$.

Příklad 7.6



Jsou dány body $A = [1, 2, 0], B = [-1, 1, 3], C = [1, 3, -1]$. Určete

- obsah $\triangle ABC$,
- délku strany $a = BC$,
- délku výšky na stranu a ,
- velikost úhlu $\alpha = \angle BAC$.

Definice

Smíšeným součinem vektorů \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Využití

- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} :

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

Nenulové vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} jsou komplanární $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Výpočet

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\blacksquare [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Příklad 7.7



Jsou dány vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$

- Ověřte, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nejsou komplanární.
- Vypočtete objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- Vypočtete objem čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- Vypočtete obsah stěny rovnoběžnostěnu určené vektory \vec{a}, \vec{b} .
- Určete délku výšky rovnoběžnostěnu na stěnu určenou vektory \vec{a}, \vec{b} .