BAA001 Matematika I

7. Vektorový počet

7.4 Skalární součin vektorů
7.5 Vektorový součin vektorů
7.6 Smíšený součin vektorů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

7.4 Skalární součin vektorů

Definice

Skalárním součinem nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ rozumíme číslo (skalár)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\varphi,$$

kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ jsou jejich délky.
Je-li alespoň jeden z vektorů nulový, klademe $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Platí

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \qquad (\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{o})$

Využití

- Vyšetřování kolmosti nenulových vektorů:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi=\frac{\pi}{2}$$

- Výpočet délky nenulového vektoru:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$$

- Výpočet úhlu nenulových vektorů:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|},\qquad \varphi\in\langle 0,\pi\rangle$$

Výpočet

$\vec{u}=(u_1,\,u_2,\,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,\,v_2,\,v_3)$, $A=[a_1,\,a_2,\,a_3]$, $B=[b_1,\,b_2,\,b_3]$

- $\boldsymbol{\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3}$
- $\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}$
- Délka úsečky AB:
  $|AB|=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

Příklad

Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby vektory $\vec{a}, \vec{b}$ byly ortogonální.
$\vec{a} = (2,\ -1,\ k)$, $\vec{b} = (5,\ 4,\ 2)$

Příklad

Určete úhel vektorů $\vec{a}, \vec{b}$.
$\vec{a} = (2,\ 1,\ 2)$, $\vec{b} = (0,\ 1,\ 1)$

Definice

Vektorovým součinem vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ rozumíme vektor označovaný $\boldsymbol{\vec{u} \times \vec{v}}$.

- Je-li alespoň jeden z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ nulový nebo jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ kolineární, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$.
- V opačném případě požadujeme, aby měl vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ následující vlastnosti:
  1. Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{u}$, $\vec{v}$.
  2. Vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u} \times \vec{v}$ tvoří v tomto pořadí pozitivní trojici vektorů (platí pravidlo pravé ruky).
  3. Délka vektoru $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, tj.
  $$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin \varphi,$$
  kde $\varphi = \angle(\vec{u}, \vec{v}) \in \langle 0, \pi \rangle$ je úhel vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Platí

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\alpha \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha \cdot \vec{v}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
4. $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

Pozor!

- $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{v} \times \vec{u}$,
- $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} \neq \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$,
- Neplatí: $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Rightarrow \quad (\vec{u} = \vec{o}$ nebo $\vec{v} = \vec{o})$.

Využití

- Vyšetřování kolinearity nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi = 0 \text{ nebo } \varphi = \pi, \text{ tj. } \vec{u} = k\vec{v}).$$

- Výpočet obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Výpočet obsahu trojúhelníku určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

- Nalezení vektoru kolmého ke dvěma daným nenulovým vektorům.

Výpočet

$\vec{u} = (u_1,\ u_2,\ u_3)$, $\vec{v} = (v_1,\ v_2,\ v_3)$

- $$\vec{\boldsymbol{u}} \times \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix}$$

  Determinant vypočteme pomocí Laplaceova rozvoje podle prvního řádku.

Příklad

Jsou dány vektory $\vec{a} = (1,\ 2,\ 1)$, $\vec{b} = (2,\ -1,\ 3)$.

a) Rozhodněte, zda jsou vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ kolineární.

b) Vypočtěte obsah rovnoběžníku nad vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$.

c) Určete vektor $\vec{x}$ kolmý k vektorům $\vec{a}$, $\vec{b}$ délky 15.

Příklad

Jsou dány body $A = [1,\ 2,\ 0]$, $B = [-1,\ 1,\ 3]$, $C = [1,\ 3,\ -1]$. Určete

a) obsah $\triangle ABC$,

b) délky stran $\triangle ABC$,

c) délky výšek $\triangle ABC$,

d) velikosti vnitřních úhlů $\triangle ABC$.

Definice

Smíšeným součinem vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (v tomto pořadí) nazveme číslo

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Využití

- Výpočet objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Výpočet objemu čtyřstěnu určeného vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

- Vyšetřování komplanárnosti vektorů:

Nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ jsou komplanární $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

Výpočet

$\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$, $\vec{c} = (c_1,\ c_2,\ c_3)$

- $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Příklad

Jsou dány vektory
$\vec{u} = \vec{AB} = (1,\ 1,\ 2)$, $\vec{v} = \vec{AC} = (3,\ 2,\ -1)$, $\vec{w} = \vec{AD} = (1,\ -3,\ -1)$.

a) Ověřte, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nejsou komplanární.

b) Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

c) Určete délku výšky rovnoběžnostěnu jdoucí bodem D.

DĚKUJI
ZA
POZORNOST!