FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

7. Vektorový počet

7.1 Reálný lineární prostor
7.2 Eukleidovský prostor $\mathbb{E}_3$
7.3 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

[1] Tryhuk, Václav – Dlouhý, Oldřich: *Matematika I, Modul GA01–M01, Vybrané části a aplikace vektorového počtu*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-526-6

[2] Chrastinová, Veronika: *Matematika I, Modul 3, Vektorová algebra a analytická geometrie*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, Brno 2004.

[3] Horňáková, Dagmar: *Matematika I_5, Vektorová algebra*, Stavební fakulta, Vysoké učení technické v Brně, vydal ECON publishing, s.r.o., Brno 2001. ISBN: 80-902268-9-2

7.1 Reálný lineární prostor

Definice

Množina $M = \{x, y, z, \dots\}$ se nazývá **reálný lineární prostor**, když pro každé $x, y \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ platí

a) $x, y \in M \quad \Rightarrow \quad x + y \in M$ (na M je definováno sčítání prvků)

b) $\alpha \in \mathbb{R}, x \in M \quad \Rightarrow \quad \alpha x \in M$ (na M je definováno násobení skalárem)

a tyto dvě operace pro každé $x, y, z \in M$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ splňují:

7.1 Reálný lineární prostor

Definice (pokračování)

1. $x + y = y + x$
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
3. existuje nulový prvek $o \in M$ takový, že $x + o = x$
4. ke každému prvku x existuje opačný prvek $-x$ tak, že $x + (-x) = o$
5. $1 \cdot x = x$
6. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Prvky $x,\ y,\ z, \dots$ nazýváme **vektory** a značíme $\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}, \dots$.

Definice

Jsou-li $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ vektory a $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, pak vektor

$$\vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n$$

nazveme **lineární kombinací** vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ nazveme **lineárně nezávislé**, když

$$c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{o} \quad \iff \quad c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$$

tj. žádný z vektorů nelze zapsat jako lineární kombinaci ostatních vektorů. V opačném případě (tj. alespoň jedno $c_i \neq 0$) jsou vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ **lineárně závislé**.

Definice

Vektory $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$ tvoří **bázi** lineárního prostoru M, když jsou lineárně nezávislé a každý další vektor $\vec{x} \in M$ je již jednoznačnou lineární kombinací vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n$, tj.

$$\vec{x} \in M \quad \Rightarrow \quad \vec{x} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \cdots + c_n\vec{x}_n \qquad (c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}).$$

Počet n vektorů báze se nazývá **dimenze** lineárního prostoru M.

Koeficienty $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ se nazývají **souřadnice vektoru** $\vec{x}$ v uspořádané bázi $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \rangle$.

Eukleidovským prostorem $\mathbb{E}_3$ budeme rozumět bodový prostor, v němž

- každému bodu $A \in \mathbb{E}_3$ je jednoznačně přiřazena uspořádaná trojice $[a_1, a_2, a_3]$ reálných čísel, které nazýváme souřadnicemi bodu A a píšeme $A = [a_1, a_2, a_3]$,
- každým dvěma bodům $A, B \in \mathbb{E}_3$, kde $A = [a_1, a_2, a_3]$, $B = [b_1, b_2, b_3]$, je přiřazena eukleidovská vzdálenost $\rho(A, B)$ bodů A, B, pro kterou platí

$$\rho(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (a_i - b_i)^2}.$$

- Každé uspořádané dvojici bodů (A, B) přiřadíme orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B a budeme ji nazývat **umístěním vektoru** $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
- **Vektorem** $\vec{u}$ budeme rozumět množinu orientovaných úseček, které mají stejný směr a velikost.
- Orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ patří do jedné třídy, jestliže úsečky (A, D), (B, C) mají týž střed.

- Bod: $A = [a_1,\, a_2,\, a_3]$
- Vektor: $\vec{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$
- Kartézský souřadnicový systém $\langle O, x, y, z\rangle$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{i} = (1,\, 0,\, 0) \\ \vec{j} = (0,\, 1,\, 0) \\ \vec{k} = (0,\, 0,\, 1) \end{array}\right\} \text{ jednotkové vektory na osách } - \text{ báze } \mathbb{E}_3$$

- Každý vektor $\vec{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ lze zapsat jako jednoznačnou lineární kombinaci vektorů $\vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k}$:

$$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}$$

- Vektor určený dvěma různými body $A = [a_1,\, a_2,\, a_3]$, $B = [b_1,\, b_2,\, b_3]$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (b_1 - a_1,\, b_2 - a_2,\, b_3 - a_3)$$

- Nulový vektor: $\vec{o} = \overrightarrow{AA} = (0,\, 0,\, 0)$

$\vec{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$, $\vec{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$

- Součet vektorů:

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2,\, u_3 + v_3)$$

- Součin vektoru s číslem $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1,\, k \cdot u_2,\, k \cdot u_3)$$

Definice

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazýváme **kolineární vektory** jsou-li lineárně závislé.

- Existují takové umístění, že leží na jedné přímce.
- Existuje právě jedno číslo $k \in \mathbb{R}$ takové, že $\vec{u} = k\vec{v}$.
- Nulový vektor považujeme za kolineární s každým vektorem.

Dva nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ nazýváme **nekolineární vektory** jsou-li lineárně nezávislé.

Definice

Tři nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazýváme **komplanární vektory** jsou-li lineárně závislé.

- Existují takové umístění, že leží v jedné rovině.
- Existuje právě jedna dvojice čísel $k, \ell \in \mathbb{R}$ taková, že $\vec{u} = k\vec{v} + \ell\vec{w}$.
- Pokud je některý z vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nulovým vektorem, pak tuto trojici vektorů považujeme také za komplanární.

Tři nenulové vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazýváme **nekomplanární vektory** jsou-li lineárně nezávislé.

Nechť A je čtvercová matice řádu n a E je jednotková matice řádu n. Pak homogenní soustava lineárních rovnic

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o}$$

má netriviální řešení právě tehdy, když

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Determinant $|A - \lambda E|$ nazýváme **charakteristický polynom** matice A.

Kořeny $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ charakteristického polynomu nazýváme **vlastní čísla** matice A.

Vlastní vektor $\vec{x}_i$ příslušný k vlastnímu číslu λ_i je řešením soustavy

$$(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{o},$$

kde za λ dosadíme kořen λ_i charakteristického polynomu.

Příklad 7.1 !

Určete všechna vlastní čísla a vlastní vektory matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Příklad 7.2 !

Určete všechna vlastní čísla a pro nejmenší vlastní číslo určete vlastní vektor matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$