FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA101 – Matematika 1

7. DERIVACE FUNKCE

7.3 Diferenciál funkce
7.4 Taylorův polynom
7.5 L'Hospitalovo pravidlo

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018.
ISBN: 978-80-7204-982-0

7.3 Diferenciál funkce

FAST

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$.
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{v } \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

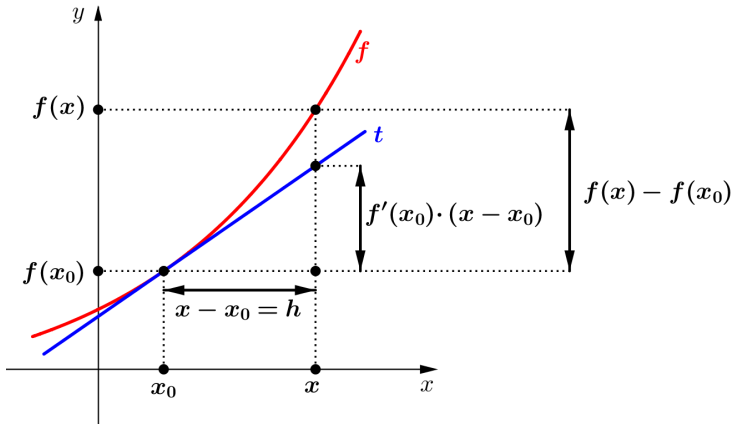
tj. $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} = f'(x_0) \cdot h$$

7.3 Diferenciál funkce

FAST



Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** pro přírůstek h nezávisle proměnné x.

Příklad 7.6

a) Určete $\mathrm{d}f(4; 0, 1)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$.

b) Pomocí diferenciálu určete přibližně hodnotu $\sqrt{4,1}$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak výraz

$$\mathrm{d}^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem n-tého řádu funkce f v bodě x_0**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x_0, h) &= f'(x_0) \cdot h && \dots \text{ diferenciál 1. řádu} \\
\mathrm{d}^2 f(x_0, h) &= f''(x_0) \cdot h^2 && \dots \text{ diferenciál 2. řádu} \\
\mathrm{d}^3 f(x_0, h) &= f'''(x_0) \cdot h^3 && \dots \text{ diferenciál 2. řádu} \\
&\vdots \\
\mathrm{d}^n f(x_0, h) &= f^{(n)}(x_0) \cdot h^n && \dots \text{ diferenciál n-tého řádu}
\end{aligned}$$

Příklad 7.7

Určete $\mathrm{d}^3 f(2; 0, 1)$ pro $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n, pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom T_n nazývá **Maclaurinův polynom**.

Funkci R_n, definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n.

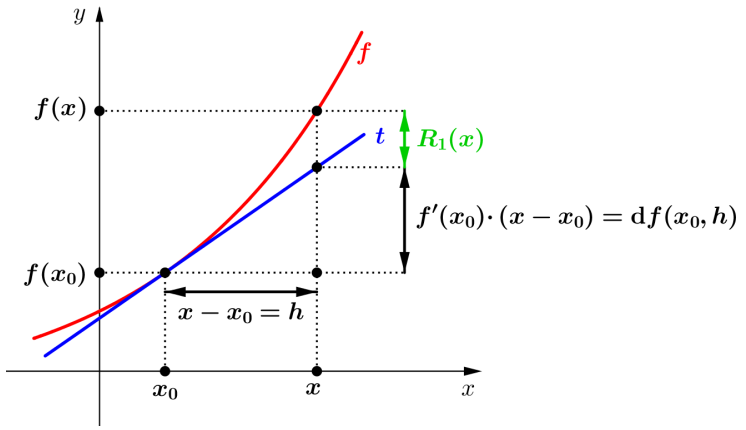
Poznámky:

- Taylorův polynom slouží k aproximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n, tzn. v okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \doteq T_n(x).$$

- Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0 někdy značíme: $T_n(f, x_0, x - x_0)$.
- Taylorův polynom můžeme zapsat stručněji užitím diferenciálů:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0,h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0,h)}{n!}$$



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ … tečna t – lineární aproximace.

Příklad 7.8 !

Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce $f(x) = (x^2 - x)\ln x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad 7.9 !

Určete Maclaurinův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \ln \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{2x} \sin 3x$.

Příklad 7.10

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\boldsymbol{f(x)}}{\boldsymbol{g(x)}} = \lim_{x\to x_0} \frac{\boldsymbol{f'(x)}}{\boldsymbol{g'(x)}}.$$

Poznámky:

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\textit{cokoliv}}{\pm\infty}$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**.
- **POZOR!** Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Příklad 7.11

Pomocí L'Hospitalova pravidla určete limity:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$