

## 6. Soustavy lineárních rovnic

- 6.1 Soustavy lineárních rovnic
- 6.2 Gaussova eliminační metoda
- 6.3 Cramerovo pravidlo

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

### 6.1 Soustavy lineárních rovnic

#### Definice

Soustava  $m$  lineárních rovnic o  $n$  neznámých  $x_1, x_2, \dots, x_n$  má tvar

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$  ... koeficienty

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$  ... absolutní členy

$b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$  ... homogenní soustava

alespoň jedno  $b_i \neq 0$  ... nehomogenní soustava

### 6.1 Soustavy lineárních rovnic

#### Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

#### Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

## Vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

## Vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru  $A \cdot X = B$ .

## Definice

Uspořádanou  $n$ -tici čísel  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  nazýváme **řešením** soustavy  $A \cdot X = B$ , jestliže po dosazení  $x_1$  za  $x_1, x_2$  za  $x_2, \dots, x_n$  za  $x_n$  do  $A \cdot X = B$  dostaneme  $m$  identit.

## Frobeniova věta

Soustava lineárních rovnic  $A \cdot X = B$

- má řešení  $\Leftrightarrow h(A) = h(A_r) = h$ 
  - $h = n$  ... právě jedno řešení
  - $h < n$  ... nekonečně mnoho řešení,  
 $n - h$  neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení  $\Leftrightarrow h(A) \neq h(A_r)$ , tj.  $h(A_r) = h(A) + 1$

## Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť  $h(A) = h(A_r)$  platí vždy.

- $h(A) = n$  ... jedno **nulové (triviální) řešení**  $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$  ... nekonečně mnoho řešení,  
která závisejí na  $n - h$  parametrech

Rozšířenou matici soustavy  $A \cdot X = B$  upravíme na schodovitý tvar.

↓

Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

## Příklad 6.1

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

$$\begin{aligned} \text{a) } 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } x + 2y - 2z - 5u &= 0 \\ 2x - y - 4z &= 0 \\ 3x - 4y - 6z + 5u &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

## Příklad 6.2

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

$$\begin{aligned} \text{a) } x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 2z &= 2 \\ -2x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 5x - 3y - 7z - 4v &= 7 \\ x + y - 3z + 4v &= 3 \\ 3x - 5y - z - 12v &= 1 \\ x - 3y + z - 8v &= -1 \end{aligned}$$

## Příklad 6.3

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

- má právě jedno řešení;
- má nekonečně mnoho řešení;
- nemá řešení.

## Příklad 6.4

Rozložte funkci  $f(x)$  na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

## Cramerovo pravidlo

Nechť determinant matice soustavy  $A \cdot X = B$  je různý od nuly, tj.  $|A| \neq 0$ . Pak má soustava  $A \cdot X = B$  právě jedno řešení  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , kde

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Přitom  $|A_i|$  jsou determinanty vzniklé z determinantu  $|A|$  nahrazením  $i$ -tého sloupce sloupcem absolutních členů.

## Příklad 6.5

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu.

- a)  $2x_1 + x_2 = 6$   
 $-x_1 - 3x_2 = 2$
- b)  $x_1 + x_2 + x_3 = 3$   
 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$   
 $x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5$