FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

6. Soustavy lineárních rovnic

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ ... **koeficienty**

$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ ... **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ ... **homogenní soustava**

alespoň jedno $b_i \neq 0$ ... **nehomogenní soustava**

6.1 Soustavy lineárních rovnic

Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$A_r = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Vektor neznámých

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_m} \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$.

Definice

Uspořádanou n-tici čísel $X = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1, r_2 za x_2, …, r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta !

Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A_r) = h$
  - $h = n$ … právě jedno řešení
  - $h < n$ … nekonečně mnoho řešení, $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

6.1 Soustavy lineárních rovnic

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$ ... jedno **nulové** (**triviální**) **řešení** $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$ ... nekonečně mnoho řešení,
  která závisejí na $n - h$ parametrech

6.2 Gaussova eliminační metoda

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.

$$\downarrow$$

Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Příklad 6.1

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 5u &= 0 \\ 2x - y - 4z \phantom{{}- 5u} &= 0 \\ 3x - 4y - 6z + 5u &= 0 \end{aligned}$$

Příklad 6.2 !

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 2z &= 2 \\ -2x - 4y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 5x - 3y - 7z - 4v &= 7 \\ x + y - 3z + 4v &= 3 \\ 3x - 5y - z - 12v &= 1 \\ x - 3y + z - 8v &= -1 \end{aligned}$$

Příklad 6.3

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

a) má právě jedno řešení;

b) má nekonečně mnoho řešení;

c) nemá řešení.

Příklad 6.4 !

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť determinant matice soustavy $A \cdot X = B$ je různý od nuly, tj. $|A| \neq 0$. Pak má soustava $A \cdot X = B$ právě jedno řešení $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{|\boldsymbol{A_i}|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Přitom $|A_i|$ jsou determinanty vzniklé z determinantu $|A|$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem absolutních členů.

Příklad 6.5

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavy.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ -x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$