FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

6. Soustavy lineárních rovnic

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

6.1 Soustavy lineárních rovnic

FAST

Definice

Soustava m **lineárních rovnic** o n neznámých $x_1, x_2, \dots, x_n$ má tvar

$$\begin{array}{ccccccccc} \boldsymbol{a_{11}x_1} & + & \boldsymbol{a_{12}x_2} & + & \cdots & + & \boldsymbol{a_{1n}x_n} & = & \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{a_{21}x_1} & + & \boldsymbol{a_{22}x_2} & + & \cdots & + & \boldsymbol{a_{2n}x_n} & = & \boldsymbol{b_2} \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \boldsymbol{a_{m1}x_1} & + & \boldsymbol{a_{m2}x_2} & + & \cdots & + & \boldsymbol{a_{mn}x_n} & = & \boldsymbol{b_m} \end{array}$$

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ ... **koeficienty**
$b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ ... **absolutní členy**

$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$ ... **homogenní soustava**
alespoň jedno $b_i \neq 0$ ... **nehomogenní soustava**

Matice soustavy

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rozšířená matice soustavy

$$\boldsymbol{A}_r=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Vektor neznámých

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Soustavu můžeme psát v maticovém tvaru $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

Definice

Uspořádanou n-tici čísel $X = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ nazýváme **řešením** soustavy $A \cdot X = B$, jestliže po dosazení r_1 za x_1, r_2 za x_2, …, r_n za x_n do $A \cdot X = B$ dostaneme m identit.

Frobeniova věta !

Soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$

- má řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) = h(A_r) = h$
  - $h = n$ … právě jedno řešení
  - $h < n$ … nekonečně mnoho řešení,
    $n - h$ neznámých volíme jako parametry
- nemá řešení $\Leftrightarrow$ $h(A) \neq h(A_r)$, tj. $h(A_r) = h(A) + 1$

Poznámka

Homogenní soustava má vždy řešení, neboť $h(A) = h(A_r)$ platí vždy.

- $h(A) = n$ … jedno **nulové** (**triviální**) **řešení** $X = (0, 0, \dots, 0)$
- $h(A) < n$ … nekonečně mnoho řešení,
  která závisejí na $n - h$ parametrech

Rozšířenou matici soustavy $A \cdot X = B$ upravíme na schodovitý tvar.

$$\downarrow$$

Dostaneme rozšířenou matici nové „jednodušší“ soustavy, která má stejnou množinu řešení, jako soustava původní.

Příklad

Pomocí Gaussovy eliminační metody řešte soustavy. Podle Frobeniovy věty zdůvodněte existenci a počet řešení.

a)
$$\begin{aligned} 2x - y - 3z &= 1 \\ x + 2y + z &= 3 \\ 3x + 3y - 2z &= 2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - z &= 5 \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 4 \\ x + 2y - 2z &= -2 \\ 3x + 6y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z - 5u &= 0 \\ 2x - y - 4z &= 0 \\ 3x - 4y - 6z + 5u &= 0 \end{aligned}$$

6.2 Gaussova eliminační metoda

FAST

Příklad

Udejte příklad soustavy dvou lineárních rovnic pro dvě neznámé, která:

a) má právě jedno řešení;

b) má nekonečně mnoho řešení;

c) nemá řešení.

Příklad

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$$f(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 6x - 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}$$

6.3 Cramerovo pravidlo

FAST

Cramerovo pravidlo

Nechť determinant matice soustavy $A \cdot X = B$ je různý od nuly, tj. $|A| \neq 0$. Pak má soustava $A \cdot X = B$ právě jedno řešení $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kde

$$\boldsymbol{x_i} = \frac{|\boldsymbol{A_i}|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Přitom $|A_i|$ jsou determinanty vzniklé z determinantu $|A|$ nahrazením i-tého sloupce sloupcem absolutních členů.

6.3 Cramerovo pravidlo

Příklad

Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavy.

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 6 \\ -\ x_1 - 3x_2 &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

DĚKUJI

ZA

POZORNOST!