

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍCH ROVNIC

– I. část (bisekce, regula falsi)

Hledáme kořen \hat{x} rovnice $f(x) = 0$.

Věta: Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak má funkce f na (a, b) alespoň jeden kořen.

Postup:

- 1) Určíme dostatečně malý **výchozí interval** (a_0, b_0) , který obsahuje jediný kořen.
- 2) Výchozí interval postupně zmenšujeme (tj. konstruujeme posloupnost do sebe vnořených intervalů $(a_0, b_0) \supset (a_1, b_1) \supset (a_2, b_2) \supset \dots \supset (a_i, b_i) \supset (a_{i+1}, b_{i+1}) \supset \dots$ s vlastností $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$)
→ v intervalu (a_i, b_i) vybereme x_{i+1} →
 - $f(x_{i+1}) = 0 \dots x_{i+1}$ je kořen
 - $f(x_{i+1}) \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(a_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = a_i, & b_{i+1} = x_{i+1} \\ f(x_{i+1}) \cdot f(b_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1} = x_{i+1}, & b_{i+1} = b_i \end{cases}$

Ukončení: Zadané malé kladné číslo ε a kritérium, kdy ukončit výpočet → rovnice vyřešena s chybou menší než ε .

BISEKCE (METODA PŮLENÍ INTERVALU)

- x_{i+1} je střed intervalu (a_i, b_i) , tj.

$$x_{i+1} = \frac{a_i + b_i}{2}$$

- **Odhad chyby:** $d_i = \frac{b_i - a_i}{2} = \frac{b_0 - a_0}{2^{i+1}}$
... i kroků metody půlení zmenší odhad chyby 2^i -krát
– d_i je polovina délky intervalu (a_i, b_i)
- **Podmínka ukončení:** $d_i < \varepsilon \Rightarrow \hat{x} = x_{i+1} \pm d_i$

REGULA FALSI (METODA TĚTIV)

- x_{i+1} z intervalu (a_i, b_i) je průsečík přímky procházející body $[a_i, f(a_i)]$ a $[b_i, f(b_i)]$ s osou x , tj.

$$x_{i+1} = \frac{a_i \cdot f(b_i) - b_i \cdot f(a_i)}{f(b_i) - f(a_i)}$$

- **Podmínka ukončení:** $|f(x_{i+1})| < \varepsilon$

Příklad: Graficky odhadněte počet a polohu kořenů rovnice

a) $x^2 - \cos x = 0$,

b) $(x - 1)^3 - \sqrt{x + 2} = 0$.

Příklad: Graficky odhadněte počet a polohu kořenů rovnice $x + e^{-x} - 2 = 0$. Aproximujte kladný kořen s chybou menší než $\varepsilon = 0,01$. (Zaokrouhľujte na 4 desetinná místa.)

Bisekce:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0						
1				-0,2769	0,1353	-0,0762
2				-0,0762	0,1353	0,0284
3				-0,0762	0,0284	-0,0243
4				-0,0243	0,0284	0,0020
5				-0,0243	0,0020	-0,0111
6				-0,0111	0,0020	-0,0045

Regula falsi:

i	a_i	b_i	x_{i+1}	$f(a_i)$	$f(b_i)$	$f(x_{i+1})$
0				-0,6321	0,1353	-0,0149
1				-0,0149	0,1353	-0,0002