BAA001 Matematika I

5. Determinanty

5.1 Definice determinantu
5.2 Vlastnosti determinantů

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

5.1 Definice determinantu

Definice

Determinant n-tého řádu je schéma tvaru

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

kterému je přiřazena (jednoznačně určená) hodnota (číslo).

Stručný zápis: $|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{a_{ij}}|$, kde $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n.

5.1 Definice determinantu

Determinant 1. řádu:

$$|a_{11}| = a_{11}$$

Determinant 2. řádu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Křížové pravidlo

Vlastnosti determinantů

- Je-li determinant ve schodovitém tvaru, pak je jeho hodnota rovna součinu prvků na hlavní diagonále.
- Determinant je roven nule, jestliže
  - obsahuje nulový řádek (sloupec),
  - obsahuje dva stejné řádky (sloupce),
  - některý řádek (sloupec) je roven $k-$násobku jiného řádku (sloupce).

Úpravy determinantů

- které nemění hodnotu determinantu:
  1. Výměna řádků za sloupce (transponování).
  2. Přičtení k-násobku jednoho řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci).
- které mění hodnotu determinantu:
  3. Záměna dvou řádků (sloupců) změní znaménko determinantu.
  4. Vynásobíme-li některý řádek (sloupec) determinantu číslem k, je hodnota nově vzniklého determinantu rovna k-násobku hodnoty původního determinantu.

Definice

Subdeterminant $\boldsymbol{A}_{ij}$ přidružený k prvku a_{ij} je determinant, který vznikne z determinantu $|A| = |a_{ij}|$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce, tj. řádku a sloupce, ve kterém leží prvek a_{ij}.

Definice

Algebraický doplněk $\overline{\boldsymbol{A}}_{ij}$ prvku a_{ij}:

$$\overline{\boldsymbol{A}}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \boldsymbol{A}_{ij}$$

Věta (**Laplaceův rozvoj**)

Determinant je roven součtu součinů prvků libovolného, ale pevně zvoleného, řádku (sloupce) s příslušnými algebraickými doplňky.

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_j \boldsymbol{a}_{ij}\overline{\boldsymbol{A}}_{ij} = \sum_i \boldsymbol{a}_{ij}\overline{\boldsymbol{A}}_{ij}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \underbrace{\sum_j (-1)^{i+j}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}}_{\text{podle řádku}} = \underbrace{\sum_i (-1)^{i+j}\boldsymbol{a}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}}_{\text{podle sloupce}}$$

Příklad 5.1

Vypočtěte detrminant

a) pomocí úpravy na chodovitý tvar

b) pomocí Laplaceova rozvoje

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 10 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 19 \end{vmatrix}$$

Příklad 5.2

Vypočtěte detrminant

a) pomocí úpravy na chodovitý tvar

b) pomocí úprav a Laplaceova rozvoje

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

Věta

Čtvercová matice A je

- regulární $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$.
- singulární $\Leftrightarrow$ $|A| = 0$.

Platí

$A,\ B$ jsou čtvercové matice řádu n; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A = B \Rightarrow |A| = |B|$
2. $|kA| = k^n |A|$
3. $|A^T| = |A|$
4. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
5. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$