FAKULTA ústav
STAVEBNÍ matematiky
a deskriptivní geometrie

BAA101 – Matematika 1

5. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

5.7 Polynomy
5.8 Racionální funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

Definice

Reálný polynom n-tého stupně je reálná funkce definovaná v $\mathbb{R}$ tvaru

$$f(x) = \boldsymbol{P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

kde $n \in \mathbb{N}_0;\ a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0.$

- $a_0, \ldots, a_n$ .... **koeficienty** polynomu
- a_0 ..... **absolutní člen**
- $n = \operatorname{st} f$ ..... **stupeň polynomu**

Poznámka:
Polynom stupně

- 0 je **konstantní** funkce ... např. $P_0(x) = 7$
- 1 je **lineární** funkce ... např. $P_1(x) = 5x - 1$
- 2 je **kvadratická** funkce ... např. $P_2(x) = 3x^2 - 4x + 2$

Operace s polynomy

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad g(x) = Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

1) Sčítání, odčítání polynomů

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k \pm b_k) x^k \quad \text{pro} \quad n \geq m$$

Sčítáme / odčítáme koeficienty u odpovídajících si mocnin.

2) Násobení polynomu konstantou

$$r \cdot f(x) = \sum_{k=0}^{n} r a_k x^k \quad \text{pro} \quad r \in \mathbb{R}$$

3) Násobení polynomů

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{kde} \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Násobíme postupně každý sčítanec prvního polynomu všemi sčítanci druhého polynomu.

Platí

$$\operatorname{st}(f+g) \leq \max(\operatorname{st} f, \operatorname{st} g)$$
$$\operatorname{st}(f \cdot g) = \operatorname{st} f + \operatorname{st} g$$

4) Dělení polynomů

Jsou-li P_n, Q_m polynomy stupňů $n \geq m > 0$, pak existují právě dva polynomy H_{n-m}, R_j (stupňů $n-m$, $j < m$) pro které platí

$$P_n = Q_m \cdot H_{n-m} + R_j, \text{ tj.}$$

$$\frac{P_n}{Q_m} = H_{n-m} + \frac{R_j}{Q_m}, \text{ pokud } Q_m \neq 0$$

Q_m … **dělitel**

H_{n-m} … **podílový polynom**

R_j … **zbytek**

$R_j = 0$ … polynom P_n je **dělitelný** polynomem Q_m

5) Rovnost polynomů

$$P_n = Q_m \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1.\ n = m \\ 2.\ a_i = b_i, \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, n \end{array}$$

Stupně polynomů a koeficienty u stejných mocnin jsou si rovny.

Příklad 5.4

Jsou dány polynomy $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x - 2$. Vypočtěte:
a) $f(x) + g(x)$, **b)** $f(x) \cdot g(x)$.

Příklad 5.5

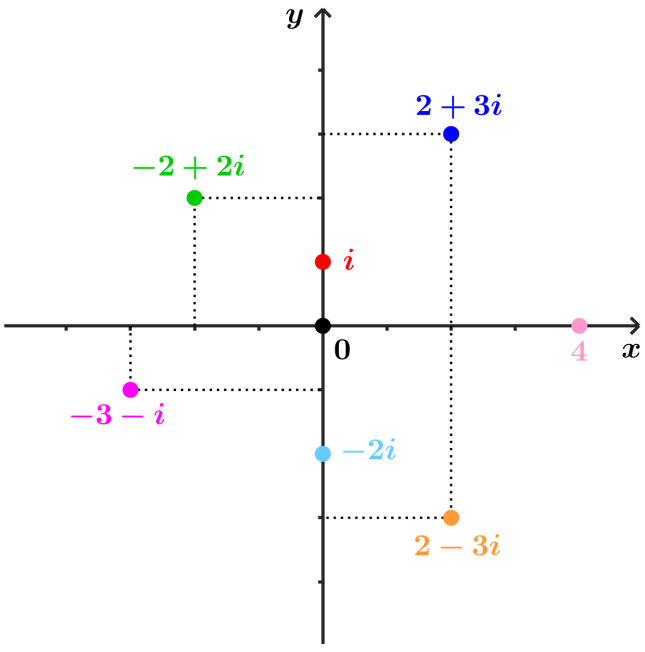
Jsou dány polynomy $f(x) = 6x^4 + 7x^3 - 6x^2 + 8x - 5$, $g(x) = 2x^2 - x + 1$.
Vypočtěte $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Komplexní čísla

- Komplexní číslo: $\boldsymbol{a + bi}$
  - $a,\ b \in \mathbb{R}$
  - $\boldsymbol{i^2 = -1}$
  - a … reálná část
  - b … imaginární část
  - i … imaginární jednotka
- Čísla komplexně sdružená: $a + bi$ a $a - bi$
- Obor komplexních čísel:
  - značíme $\mathbb{C}$
  - platí: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Komplexní čísla

- Zobrazení: *Gaussova rovina*
  - x … reálná osa
  - y … imaginární osa



Definice

Je-li P_n polynom stupně $n \geq 1$, pak

- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme **kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x_0) = 0$;
- číslo $x_0 \in \mathbb{C}$ nazveme ***k*-násobným kořenem** polynomu P_n, jestliže platí $P_n(x) = (x - x_0)^k \cdot Q_{n-k}(x),$ přičemž $Q_{n-k}(x_0) \neq 0$;
- výraz $x - x_0$ nazýváme **kořenovým činitelem**.

Kořenové vlastnosti polynomů

- V $\mathbb{C}$ má každý polynom n-tého stupně právě n kořenů (přičemž každý kořen je počítán tolikrát, jaká je jeho násobnost) a platí

$$P_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

  Jde o tzv. **rozklad polynomu na součin kořenových činitelů**.
- S každým k-násobným kořenem $a + bi$ má polynom také k-násobný kořen $a - bi$.
- Polynom lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.
- Má-li polynom P_n *celočíselné* koeficienty $a_i \in \mathbb{Z},\ i = 0, \ldots, n$ a
  - kořen $x_0 \in \mathbb{Z} \ \Rightarrow \ x_0 | a_0$,
  - kořen $x_0 = \frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \ \Rightarrow \ p | a_0,\ q | a_n$.

Kořenové vlastnosti polynomů

- Rozklad polynomu v *reálném oboru*:

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_r)^{k_r}\cdot((x-a_1)^2+b_1^2)^{\ell_1}\cdot\ldots\cdot((x-a_s)^2+b_s^2)^{\ell_s},$$

kde polynom P_n má reálné kořeny $x_1,\ldots,x_r$ násobností $k_1,\ldots,k_r$, komplexní kořeny $a_1 \pm b_1 i,\ldots,a_s \pm b_s i$ násobností $\ell_1,\ldots,\ell_s$ a platí $k_1+\cdots+k_r+2\ell_1+\cdots+2\ell_s = n$.

Jde tedy o součin polynomů tvaru

- $(ex+d)^k,\ e\neq 0,\ k\in\mathbb{N}$
- $(ax^2+bx+c)^\ell,\ a\neq 0,\ D=b^2-4ac<0,\ \ell\in\mathbb{N}$

Příklad 5.6

Najděte reálné kořeny polynomu $f(x)$ a určete jejich násobnost.

$f(x) = (x-1)^2(x+4)(2x-1)^3(x^2+x+1)(5x^2+3)^3$

Hornerovo schéma

$P_n(x) = (x-c) \cdot H_{n-1}(x) + d, \quad H_{n-1}(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
$x = c$	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	$d = P_n(c)$

$$
\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= c \cdot b_{n-1} + a_{n-1} \\
b_{n-3} &= c \cdot b_{n-2} + a_{n-2} \\
&\vdots \\
b_0 &= c \cdot b_1 + a_1 \\
d &= c \cdot b_0 + a_0
\end{aligned}
$$

je-li $d = 0$ pak c je kořen polynomu $P_n(x)$

5.7 Polynomy → Kořenové vlastnosti polynomů

Příklad 5.7

Určete kořeny a rozklad v reálném oboru polynomu $f(x)$.

$f(x) = 2x^5 + x^4 - 5x^3 + x^2 - x + 2$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Věta

Na změnu znaménka polynomu mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti.

Příklad 5.8

Určete znaménko polynomu

$f(x) = x^3(x-2)^5(x-5)^4(x+4)(x-6)^6(x+1)^2(x-3)^7(x^2-x+1)^2(x^2+9)^3.$

5.7 Polynomy

Příklad 5.9

Určete kořeny, rozklad v reálném oboru a znaménko polynomu $f(x)$.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$

b) $f(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - x^2 - x + 2$

c) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

5.8 Racionální funkce

Definice

Racionální funkcí $f(x) = \dfrac{P_m}{Q_n}$ nazýváme podíl dvou nenulových polynomů P_m, Q_n stupňů m, n.

- $m < n$ ... **ryzí racionální funkce**
- $m \geq n$ ... **neryzí racionální funkce**

Věta

Každá neryzí racionální funkce je buď polynom nebo ji lze vyjádřit jako součet polynomu a ryzí racionální funkce.

Příklad 5.10

Rozložte racionální funkci $f(x)$ na součet polynomu a ryzí racionální funkce.

$$f(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

Věta

Na změnu znaménka racionální funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$, kde polynomy P_m, Q_n nemají společné kořeny, mají vliv pouze reálné kořeny liché násobnosti čitatele a jmenovatele.

Příklad 5.11

Určete znaménko funkce $f(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{(x+2)(x-5)^2(2x^2+1)}{x^4(x-1)^3}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

Věta

Každou ryzí racionální funkci $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ lze rozložit na součet parciálních zlomků.

- V rozkladu Q_n je $(ex+d)^k,\ e \neq 0$ $\rightarrow$
  $\rightarrow$ v rozkladu $f(x)$ je součet k parciálních zlomků:

$$\frac{C_1}{ex+d} + \frac{C_2}{(ex+d)^2} + \cdots + \frac{C_k}{(ex+d)^k}$$

- V rozkladu Q_n je $(ax^2+bx+c)^\ell,\ a \neq 0, D < 0$ $\rightarrow$
  $\rightarrow$ v rozkladu $f(x)$ je součet ℓ parciálních zlomků:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{A_\ell x+B_\ell}{(ax^2+bx+c)^\ell}$$

Příklad 5.12

Napište obecný tvar rozkladu racionální funkce $f(x)$ na parciální zlomky:

$$f(x) = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)^3(x^2+x+1)(x^2+1)^2}$$

Příklad 5.13

Rozhodněte, které z racionálních funkcí jsou parciální zlomky.

a) $\dfrac{4}{(x+2)^3}$

b) $\dfrac{5x-1}{x^2+2x+4}$

c) $\dfrac{3}{x^2-1}$

d) $\dfrac{x}{x+5}$

e) $\dfrac{2}{3x-4}$

f) $\dfrac{x^2+2x+3}{(4x^2+5)^6}$

g) $\dfrac{1}{x^2+x+1}$

h) $\dfrac{1}{x^3+1}$

i) $\dfrac{2x-3}{(3x+7)^5}$

j) $\dfrac{x}{x^2+1}$

k) $\dfrac{2x}{(x^2+7)^3}$

l) $\dfrac{x+5}{(x^2+2x-3)^4}$

Postup při rozkladu racionální funkce na parciální zlomky:

1. Je funkce $f(x) = \frac{P_m}{Q_n}$ ryzí? Pokud není, vydělíme $P_m : Q_n$ a rozkládáme zbytek (RRF).
2. Rozklad jmenovatele Q_n na součin v $\mathbb{R}$.
3. Obecný tvar (schéma) rozkladu.
4. Výpočet neurčitých koeficientů (konstant).

Příklad 5.14

Rozložte funkci $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+x-6}$ na parciální zlomky.

Příklad 5.15 !

Určete znaménko funkce $f(x)$ a rozložte ji na parciální zlomky, resp. na součet polynomu s parciálními zlomky.

a) $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-9x+18}{x^4+3x^2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^4+x^3+x^2}{x^3+3x^2+3x+1}$

5.8 Racionální funkce → Rozklad na parciální zlomky

Příklad 5.16 !

Rozložte funkci $f(x)$ na parciální zlomky.

$f(x) = \dfrac{4x^3-4x^2+6x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$