



FAKULTA ústav  
STAVEBNÍ matematiky  
a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

## 4. Matice

4.1 Matice

4.2 Operace s maticemi

4.3 Hodnost matice

4.4 Inverzní matice

4.5 Maticové rovnice

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

## Definice

**Matice typu  $(m, n)$** , kde  $m, n \in \mathbb{N}$  je uspořádaná soustava  $m \cdot n$  čísel zapsaných ve tvaru tabulky do  $m$  řádků a  $n$  sloupců.

Matici typu  $(m, n)$  zapisujeme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \dots$  **prvky matice**

$a_{ij}$  ... prvek ležící v  $i$ -tém řádku a  $j$ -tém sloupci

–  $i$  ... **řádkový index**

–  $j$  ... **sloupcový index**

Stručný zápis:  $A$ ,  $(a_{ij})$ ,  $(a_{ij})_m^n$

$m \neq n$  ... **obdélníková matice**

$m = n$  ... **čtvercová matice  $n$ -tého řádu**

- $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  ..... **hlavní diagonála**
- $a_{n1}, a_{2,n-2}, \dots, a_{n1}$  ... **vedlejší diagonála**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

## Speciální matice

- **Řádková matice** (řádkový vektor)
  - matice typu  $(1, n)$
  - např.:  $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$
- **Sloupcová matice** (sloupcový vektor)
  - matice typu  $(m, 1)$
  - např.:  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Nulová matice**
  - $a_{ij} = 0 \dots$  všechny prvky jsou rovny nule
  - značíme  $O$
  - např.:  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## Speciální čtvercové matice

### ■ Diagonální matice

- $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$  ... všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové

- např.:  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

### ■ Jednotková matice

- $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$  ... diagonální matice, kde všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné

- značíme  $E$

- např.:  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

## ▪ Dolní trojúhelníková matice

- $a_{ij} = 0$  pro  $j > i$  ... všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové

- např.: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

## ▪ Horní trojúhelníková matice

- $a_{ij} = 0$  pro  $i > j$  ... všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové

- např.: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

## ■ Symetrická matice

- $a_{ij} = a_{ji}$  ... *prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné*

- např.: 
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

## ■ Antisymetrická matice

- $\begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} & \text{pro } i \neq j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i = j \end{cases}$  ... *prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále se liší znaménkem a všechny prvky hlavní diagonály jsou nulové*

- např.: 
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

### 1) Rovnost matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

*(Prvky na stejných místech se rovnají.)*

### 2) Součet matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

*(Sčítáme prvky na stejných místech.)*



### 3) Násobení matice číslem $k$ ( $k$ -násobek matice)

$$A = (a_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$kA = C \Leftrightarrow ka_{ij} = c_{ij}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Číslem  $k$  vynásobíme všechny prvky matice  $A$ .)

### 4) Rozdíl matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A - B = A + (-B)$$

kde  $-B = (-1) \cdot B$  ... **opačná matice** k matici  $B$

(Odečítáme prvky na stejných místech.)

### Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

- a)  $A + B$
- b)  $A - B$
- c)  $2A$

### Platí

$A, B, C, O$  jsou matice téhož typu;  $k, \ell \in \mathbb{R}$

1.  $A + B = B + A$  *(komutativní zákon)*
2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$  *(asociativní zákon)*
3.  $A + O = A$
4.  $A + (-A) = O$
5.  $1 \cdot A = A$
6.  $k(\ell A) = (k\ell)A$  *(asociativní zákon pro násobení číslem)*
7.  $(k + \ell)A = kA + \ell A$  *(1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*
8.  $k(A + B) = kA + kB$  *(2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*

### 5) Součin matic

$$A = (a_{ij})_m^n, \quad B = (b_{jk})_n^p, \quad C = (c_{ik})_m^p$$

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{array}{c} i\text{-tý řádek} \\ \left( \begin{array}{cccc} a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} k\text{-tý sloupec} \\ \left( \begin{array}{ccc} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} k\text{-tý sloupec} \\ \left( \begin{array}{ccc} \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ik} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} i\text{-tý řádek} \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

### Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

- $A \cdot B$
- $B \cdot A$

**Poznámka:** Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

### Definice

Čtvercové matice  $A, B$  řádu  $n$  se nazývají **zaměnitelné (komutativní)**, jestliže platí  $A \cdot B = B \cdot A$ .

### Platí

$A, O, E$  – čtvercové matice řádu  $n$

1.  $A \cdot O = O \cdot A = O$
2.  $A \cdot E = E \cdot A = A$

### Platí

$A, B, C$  – matice vhodných typů;  $k \in \mathbb{R}$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$  *(asociativní zákon)*
- $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$  *(asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem)*
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$  *(1. distributivní zákon)*
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  *(2. distributivní zákon)*

### 6) Mocnina matice

$$A^0 = E$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$



### 7) Transponování matice

$$A = (a_{ij})_m^n$$

$$A \rightarrow A^T \quad \dots \quad a_{ij} = a_{ji}^T$$

pro  $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Zaměníme řádky za sloupce.)

–  $A^T$  je typu  $(n, m)$  ... **transponovaná matice** k matici  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

### Platí

$A, B, C$  – matice vhodných typů;  $k \in \mathbb{R}$

1.  $(A^T)^T = A$
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4.  $(kA)^T = kA^T$

### Poznámka:

- 1) Je-li matice  $A$  symetrická, pak  $A^T = A$ .  
Je-li matice  $A$  antisymetrická, pak  $A^T = -A$ .
- 2) Je-li  $A$  čtvercová matice, pak
  - $A + A^T$  je symetrická matice
  - $A - A^T$  je antisymetrická matice
- 3) Každou čtvercovou matici lze rozložit na součet symetrické a antisymetrické matice

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

### Definice

**Hodnost matice**  $A$  je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice  $A$ .

Značíme  $h(A)$ .

### Platí:

$A$  je matice typu  $(m, n)$ ,  $O$  je nulová matice

- $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

### Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení  $k$ -násobku jednoho řádku / sloupce k  $\ell$ -násobku jiného řádku / sloupce.

### Věta

Elementární úpravy nemění hodnost matice.

### Poznámka:

1. Pokud upravujeme jen řádky, hovoříme o řádkových úpravách, analogicky zavádíme sloupcové úpravy.
2. Jestliže matice  $B$  vznikla elementární úpravou matice  $A$ , používáme pro označení vztahu mezi nimi značku  $A \sim B$ .

Každou nenulovou matici lze pomocí elementárních úprav převést na **schodovitou matici** téhož typu  $(m, n)$ .

### Schodovitá matice

- každý řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí
- $h(A) =$  "počet nenulových řádků"

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Definice

Čtvercová matice  $A$  řádu  $n$  se nazývá

- **regulární**, jestliže  $h(A) = n$
- **singulární**, jestliže  $h(A) < n$   
→ číslo  $n - h(A)$  nazýváme **defekt (nulita)** matice  $A$

### Příklad

Určete hodnost matice

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



### Definice

Nechť  $A$  je čtvercová matice. Existuje-li matice  $A^{-1}$  taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

kde  $E$  je jednotková matice, nazýváme  $A^{-1}$  **inverzní matice** k matici  $A$ .

### Věta

Inverzní matice k matici  $A$  existuje právě tehdy, když matice  $A$  je regulární.

### Věta

Nechť  $A$  je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

### Platí

$A, B$  jsou regulární matice stejného řádu,  $k \neq 0$  je reálné číslo.

1.  $E^{-1} = E$

2.  $(A^{-1})^{-1} = A$

3.  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

4.  $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

5.  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

### Výpočet inverzní matice:

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{E} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{E} & \mathbf{A}^{-1} \end{array} \right)$$

### Příklad

Vypočtete inverzní matici k matici  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici  $X$  má dvě části:

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici  $X$ .
2. Neznámou matici  $X$  vypočítáme.

### Příklad

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici  $X$ .

a)  $X \cdot A = B$

b)  $A \cdot X \cdot B = C$

c)  $A \cdot X - 2B = C$

### Příklad

Řešte maticovou rovnici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### Příklad

Řešte soustavu maticových rovnic.

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**DĚKUJI  
ZA  
POZORNOST!**