

4. Matice

- 4.1 Matice
- 4.2 Operace s maticemi
- 4.3 Hodnost matice
- 4.4 Inverzní matice
- 4.5 Maticové rovnice

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

4.1 Matice

Definice

Matice typu (m, n) , kde $m, n \in \mathbb{N}$ je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců.

Matici typu (m, n) zapisujeme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \dots$ **prvky matice**

$a_{ij} \dots$ prvek ležící v i -tém řádku a j -tém sloupci

– $i \dots$ **řádkový index**

– $j \dots$ **sloupcový index**

4.1 Matice

Stručný zápis: $A, (a_{ij}), (a_{ij})_m^n$

$m \neq n \dots$ **obdélníková matice**

$m = n \dots$ **čtvercová matice n -tého řádu**

• $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \dots$ **hlavní diagonála**

• $a_{n1}, a_{2,n-2}, \dots, a_{n1} \dots$ **vedlejší diagonála**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Speciální matice

- **Řádková matice** (řádkový vektor)
 - matice typu $(1, n)$
 - např.: $(1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5)$
- **Sloupcová matice** (sloupcový vektor)
 - matice typu $(m, 1)$
 - např.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Nulová matice**
 - $a_{ij} = 0 \dots$ všechny prvky jsou rovny nule
 - značíme O
 - např.: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Speciální čtvercové matice

- **Diagonální matice**
 - $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \dots$ všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové
 - např.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- **Jednotková matice**
 - $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \dots$ diagonální matice, kde všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné
 - značíme E
 - např.: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Dolní trojúhelníková matice**
 - $a_{ij} = 0$ pro $j > i \dots$ všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové
 - např.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- **Horní trojúhelníková matice**
 - $a_{ij} = 0$ pro $i > j \dots$ všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové
 - např.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- **Symetrická matice**
 - $a_{ij} = a_{ji} \dots$ prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné
 - např.: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- **Antisymetrická matice**
 - $\begin{cases} a_{ij} = -a_{ji} & \text{pro } i \neq j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i = j \end{cases} \dots$ prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále se liší znaménkem a všechny prvky hlavní diagonály jsou nulové
 - např.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Rovnost matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$
(Prvky na stejných místech se rovnají.)

2) Součet matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$A + B = C \Leftrightarrow a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$
(Sčítáme prvky na stejných místech.)

3) Násobení matice číslem k (k -násobek matice)

$$A = (a_{ij})_m^n, C = (c_{ij})_m^n$$

$$kA = C \Leftrightarrow ka_{ij} = c_{ij}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$
(Číslem k vynásobíme všechny prvky matice A .)

4) Rozdíl matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{ij})_m^n$$

$$A - B = A + (-B)$$

kde $-B = (-1) \cdot B$... **opačná matice** k matici B
(Odečítáme prvky na stejných místech.)

Příklad 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Vypočtete:

- $A + B$
- $A - B$
- $2A$

Platí

A, B, C, O jsou matice téhož typu; $k, \ell \in \mathbb{R}$

- $A + B = B + A$ (komutativní zákon)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (asociativní zákon)
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$
- $1 \cdot A = A$
- $k(\ell A) = (k\ell)A$ (asociativní zákon pro násobení číslem)
- $(k + \ell)A = kA + \ell A$ (1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)
- $k(A + B) = kA + kB$ (2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)

5) Součin matic

$$A = (a_{ij})_m^n, B = (b_{jk})_n^p, C = (c_{ik})_m^p$$

$$A \cdot B = C \Leftrightarrow c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, p$

$$\begin{array}{c}
 \text{\scriptsize } i\text{-tý řádek} \\
 \left(\begin{array}{cccc}
 a_{i1} & \dots & a_{in} & \\
 \dots & & & \\
 \dots & & &
 \end{array} \right)
 \begin{array}{c}
 \text{\scriptsize } k\text{-tý sloupec} \quad \text{\scriptsize } k\text{-tý sloupec} \\
 \left(\begin{array}{c}
 \vdots \\
 b_{1k} \\
 \vdots \\
 b_{2k} \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 \vdots \\
 b_{nk} \\
 \vdots
 \end{array} \right)
 =
 \left(\begin{array}{ccc}
 \dots & & \\
 \dots & c_{ik} & \dots \\
 \dots & &
 \end{array} \right)
 \text{\scriptsize } i\text{-tý řádek}
 \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Příklad 4.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte:

- $A \cdot B$
- $B \cdot A$

Poznámka: Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné (komutativní)**, jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí

A, O, E – čtvercové matice řádu n

- $A \cdot O = O \cdot A = O$
- $A \cdot E = E \cdot A = A$

Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (asociativní zákon)
- $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$ (asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem)
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (1. distributivní zákon)
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (2. distributivní zákon)

6) Mocnina matice

$$A^0 = E$$

$$A^2 = A \cdot A$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

$$\vdots$$

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_n$$

7) Transponování matice

$$A = (a_{ij})_m^n$$

$$A \rightarrow A^T \quad \dots \quad a_{ij} = a_{ji}^T$$

pro $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

(Zaměníme řádky za sloupce.)

– A^T je typu (n, m) ... **transponovaná matice** k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Platí

A, B, C – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

Poznámka:

- 1) Je-li matice A symetrická, pak $A^T = A$.
Je-li matice A antisymetrická, pak $A^T = -A$.
- 2) Je-li A čtvercová matice, pak
 - $A + A^T$ je symetrická matice
 - $A - A^T$ je antisymetrická matice
- 3) Každou čtvercovou matici lze rozložit na součet symetrické a antisymetrické matice

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Definice

Hodnost matice A je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice A .

Značíme $h(A)$.

Platí:

A je matice typu (m, n) , O je nulová matice

- $0 \leq h(A) \leq \min(m, n)$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení k -násobku jednoho řádku / sloupce k l -násobku jiného řádku / sloupce.

Věta

Elementární úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka:

1. Pokud upravujeme jen řádky, hovoříme o řádkových úpravách, analogicky zavádíme sloupcové úpravy.
2. Jestliže matice B vznikla elementární úpravou matice A , používáme pro označení vztahu mezi nimi značku $A \sim B$.

Každou nenulovou matici lze pomocí elementárních úprav převést na **schodovitou matici** téhož typu (m, n) .

Schodovitá matice

- každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí
- $h(A)$ = "počet nenulových řádků"

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $h(A) = n$
- **singulární**, jestliže $h(A) < n$
→ číslo $n - h(A)$ nazýváme **defekt (nulita)** matice A

Příklad 4.3

Určete hodnotu matice

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Existuje-li matice A^{-1} taková, že platí

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

kde E je jednotková matice, nazýváme A^{-1} **inverzní matice** k matici A .

Věta

Inverzní matice k matici A existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Platí

 A, B jsou regulární matice stejného řádu, $k \neq 0$ je reálné číslo.

1. $E^{-1} = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Výpočet inverzní matice:

$$\left(A \mid E \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(E \mid A^{-1} \right)$$

4.4 Inverzní matice

Příklad 4.4

Vypočtěte inverzní matici k matici A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Maticové rovnice

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X má dvě části:

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X .
2. Neznámou matici X vypočítáme.

4.5 Maticové rovnice

Příklad 4.5

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici X .

- a) $X \cdot A = B$
- b) $A \cdot X \cdot B = C$
- c) $A \cdot X - 2B = C$

Příklad 4.6

Řešte maticovou rovnici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4.5 Maticové rovnice

Příklad 4.7

Řešte soustavu maticových rovnic.

$$\begin{aligned} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y &= \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$