FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika I

4. Matice

4.1 Matice
4.2 Operace s maticemi
4.3 Hodnost matice
4.4 Inverzní matice
4.5 Maticové rovnice

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

FAST

Novotný, Jiří: *Matematika I, Modul 1, Základy lineární algebry*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno 2004. ISBN: 978-80-7204-748-2

Definice

Matice typu (m,n), kde $m,n \in \mathbb{N}$ je uspořádaná soustava $m \cdot n$ čísel zapsaných ve tvaru tabulky do m řádků a n sloupců.
Matici typu (m,n) zapisujeme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$a_{11},\ a_{12}, \dots,\ a_{mn}$ ... **prvky matice**

a_{ij} ... prvek ležící v i-tém řádku a j-tém sloupci
- i ... **řádkový index**
- j ... **sloupcový index**

Stručný zápis: $A,\ (a_{ij}),\ (a_{ij})_m^n$

$m \neq n$ ... **obdélníková matice**

$m = n$ ... **čtvercová matice n-tého řádu**
- $a_{11},\ a_{22}, \dots,\ a_{nn}$ ...... **hlavní diagonála**
- $a_{n1},\ a_{2,n-2}, \dots,\ a_{n1}$ ... **vedlejší diagonála**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Speciální matice

- **Řádková matice** (řádkový vektor)
  - matice typu $(1, n)$
  - např.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$
- **Sloupcová matice** (sloupcový vektor)
  - matice typu $(m, 1)$
  - např.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- **Nulová matice**
  - $a_{ij} = 0 \quad \ldots$ *všechny prvky jsou rovny nule*
  - značíme O
  - např.: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Speciální čtvercové matice

- **Diagonální matice**
  - $\begin{cases} a_{ij} \neq 0 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \ldots$ *všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou nulové*
  - např.: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$
- **Jednotková matice**
  - $\begin{cases} a_{ij} = 1 & \text{pro } i = j \\ a_{ij} = 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases} \quad \ldots$ *diagonální matice, kde všechny prvky hlavní diagonály jsou rovny jedné*
  - značíme E
  - např.: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Dolní trojúhelníková matice**
  - $a_{ij} = 0$ pro $j > i$ … *všechny prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové*
  - např.: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$
- **Horní trojúhelníková matice**
  - $a_{ij} = 0$ pro $i > j$ … *všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové*
  - např.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- **Symetrická matice**
  - $a_{ij} = a_{ji}$ … *prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále jsou stejné*
  - např.: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$
- **Antisymetrická matice**
  - $\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \text{ pro } i \neq j \\ a_{ij} = 0 \text{ pro } i = j \end{cases}$ … *prvky symetricky položené vzhledem k hlavní diagonále se liší znaménkem a všechny prvky hlavní diagonály jsou nulové*
  - např.: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

1) Rovnost matic

$A = (a_{ij})_m^n,\; B = (b_{ij})_m^n$

$$\boldsymbol{A = B \;\Leftrightarrow\; a_{ij} = b_{ij}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n$

(Prvky na stejných místech se rovnají.)

2) Součet matic

$A = (a_{ij})_m^n,\; B = (b_{ij})_m^n,\; C = (c_{ij})_m^n$

$$\boldsymbol{A + B = C \;\Leftrightarrow\; a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n$

(Sčítáme prvky na stejných místech.)

3) Násobení matice číslem k (k-násobek matice)

$A = (a_{ij})_m^n,\; C = (c_{ij})_m^n$

$$\boldsymbol{kA = C \;\Leftrightarrow\; ka_{ij} = c_{ij}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m;\; j = 1, 2, \ldots, n$

(Číslem k vynásobíme všechny prvky matice A.)

4) Rozdíl matic

$A = (a_{ij})_m^n,\; B = (b_{ij})_m^n$

$$\boldsymbol{A - B = A + (-B)}$$

kde $-B = (-1) \cdot B$ ... **opačná matice** k matici B

(Odečítáme prvky na stejných místech.)

Příklad 4.1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte:

a) $A + B$

b) $A - B$

c) $2A$

Platí

$A,\ B,\ C,\ O$ jsou matice téhož typu; $k, \ell \in \mathbb{R}$

1. $A + B = B + A$ *(komutativní zákon)*
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(asociativní zákon)*
3. $A + O = A$
4. $A + (-A) = O$
5. $1 \cdot A = A$
6. $k(\ell A) = (k\ell)A$ *(asociativní zákon pro násobení číslem)*
7. $(k + \ell)A = kA + \ell A$ *(1. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*
8. $k(A + B) = kA + kB$ *(2. distributivní zákon pro násobení matice číslem)*

5) Součin matic

$A = (a_{ij})_m^n,\ B = (b_{jk})_n^p,\ C = (c_{ik})_m^p$

$$\boldsymbol{A \cdot B = C} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, p$

$$\begin{array}{c} \\ i\text{-tý řádek} \end{array} \begin{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & \cdots\cdots\cdots & \end{pmatrix} \begin{array}{c} k\text{-tý sloupec} \\ \begin{pmatrix} \vdots & b_{1k} & \vdots \\ \vdots & b_{2k} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{nk} & \vdots \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} k\text{-tý sloupec} \\ \begin{pmatrix} & \cdots\cdots & \\ \cdots & c_{ik} & \cdots \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ i\text{-tý řádek} \end{array}$$

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk}$$

Příklad 4.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vypočtěte:

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

Poznámka: Násobení matic obecně není komutativní, tj. obecně **neplatí**

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

Definice

Čtvercové matice A, B řádu n se nazývají **zaměnitelné** (**komutativní**), jestliže platí $A \cdot B = B \cdot A$.

Platí

$A,\ O,\ E$ – čtvercové matice řádu n

1. $A \cdot O = O \cdot A = O$
2. $A \cdot E = E \cdot A = A$

4.2 Operace s maticemi

Platí

$A,\ B,\ C$ – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (*asociativní zákon*)
2. $k(A \cdot B) = (kA) \cdot B = A \cdot (kB)$ (*asociativní zákon pro násobení součinu matic číslem*)
3. $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ (*1. distributivní zákon*)
4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (*2. distributivní zákon*)

6) Mocnina matice

$$\begin{aligned} A^0 &= E \\ A^2 &= A \cdot A \\ A^3 &= A \cdot A \cdot A \\ &\vdots \\ A^n &= \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n} \end{aligned}$$

7) Transponování matice

$A = (a_{ij})_m^n$

$$\boldsymbol{A} \;\rightarrow\; \boldsymbol{A^T} \quad \ldots \quad \boldsymbol{a_{ij} = a^T_{ji}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n$

(Zaměníme řádky za sloupce.)

– A^T je typu (n, m) ... **transponovaná matice** k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Platí

$A,\ B,\ C$ – matice vhodných typů; $k \in \mathbb{R}$

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(A \cdot C)^T = C^T \cdot A^T$
4. $(kA)^T = kA^T$

Poznámka:

1) Je-li matice A symetrická, pak $A^T = A$.
Je-li matice A antisymetrická, pak $A^T = -A$.

2) Je-li A čtvercová matice, pak
   - $A + A^T$ je symetrická matice
   - $A - A^T$ je antisymetrická matice

3) Každou čtvercovou matici lze rozložit na součet symetrické a antisymetrické matice

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Definice

Hodnost matice A je celé nezáporné číslo, udávající maximální počet lineárně nezávislých řádků / sloupců matice A.
Značíme $\boldsymbol{h(A)}$.

Platí:

A je matice typu (m, n), O je nulová matice

- $\boldsymbol{0 \leq h(A) \leq \min(m, n)}$
- $h(O) = 0$
- $h(A^T) = h(A)$

Elementární úpravy matice

1. Výměna řádků / sloupců.
2. Vynásobení řádku / sloupce nenulovým číslem.
3. Přičtení k-násobku jednoho řádku / sloupce k ℓ-násobku jiného řádku / sloupce.

Věta

Elementární úpravy nemění hodnost matice.

Poznámka:

1. Pokud upravujeme jen řádky, hovoříme o řádkových úpravách, analogicky zavádíme sloupcové úpravy.
2. Jestliže matice B vznikla elementární úpravou matice A, používáme pro označení vztahu mezi nimi značku $\boldsymbol{A \sim B}$.

Každou nenulovou matici lze pomocí elementárních úprav převést na **schodovitou matici** téhož typu (m, n).

Schodovitá matice

- každý nenulový řádek začíná větším počtem nul než řádek předchozí
- $h(A) =$ "počet nenulových řádků"

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definice

Čtvercová matice A řádu n se nazývá

- **regulární**, jestliže $\boldsymbol{h(A) = n}$
- **singulární**, jestliže $\boldsymbol{h(A) < n}$
  $\rightarrow$ číslo $n - h(A)$ nazýváme **defekt** (**nulita**) matice A

Příklad 4.3

Určete hodnost matice

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Definice

Nechť A je čtvercová matice. Existuje-li matice A^{-1} taková, že platí

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

kde E je jednotková matice, nazýváme A^{-1} **inverzní matice** k matici A.

Věta

Inverzní matice k matici A existuje právě tehdy, když matice A je regulární.

Věta

Nechť A je regulární matice. Pak k ní existuje právě jedna inverzní matice.

Platí

A, B jsou regulární matice stejného řádu, $k \neq 0$ je reálné číslo.

1. $E^{-1} = E$
2. $(A^{-1})^{-1} = A$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
5. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Výpočet inverzní matice:

$$\left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{E} \end{array} \right) \xrightarrow{\text{elementární řádkové úpravy}} \left(\begin{array}{c|c} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}^{-1} \end{array} \right)$$

4.4 Inverzní matice

Příklad 4.4

Vypočtěte inverzní matici k matici A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.5 Maticové rovnice

Řešení maticové rovnice o jedné neznámé matici X má dvě části:

1. Z maticové rovnice osamostatníme neznámou matici X.
2. Neznámou matici X vypočítáme.

Příklad 4.5

Z maticové rovnice osamostatněte neznámou matici X.

a) $X \cdot A = B$

b) $A \cdot X \cdot B = C$

c) $A \cdot X - 2B = C$

Příklad 4.6 !

Řešte maticovou rovnici.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.7 !

Řešte soustavu maticových rovnic.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + Y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot Y = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$