FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA101 – Matematika 1

# 5. REÁLNÁ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

5.5 Složená funkce
5.6 Inverzní funkce

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

## Základní literatura

FAST

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018.
ISBN: 978-80-7204-982-0



## 5.5 Složená funkce

FAST

$$\begin{aligned} f &: y = f(u) \\ g &: u = g(x) \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad f \circ g : y = f(g(x))$$

$f \circ g$ … **složená funkce**
$f$ … **vnější složka** složené funkce
$g$ … **vnitřní složka** složené funkce

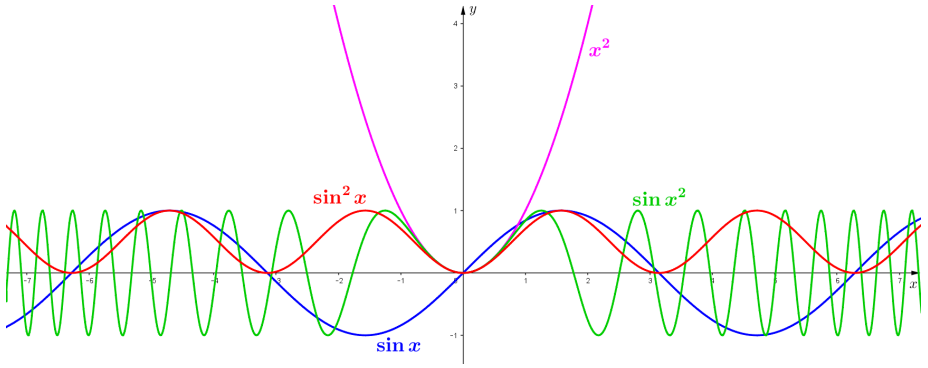
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ g(x) &= \sin x \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = (\sin x)^2 = \sin^2 x \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \sin(x^2) = \sin x^2 \end{aligned} \quad \ldots \textit{ není totéž!}$$

⇒ Záleží na pořadí, v jakém funkce skládáme!



## 5.5 Složená funkce

FAST




**Poznámka:** $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + \sin(2x - \frac{\pi}{2})\right]$

## Příklad 5.2

Určete definiční obor funkce $f$.

**a)** $f : y = \sqrt{\sin x}$

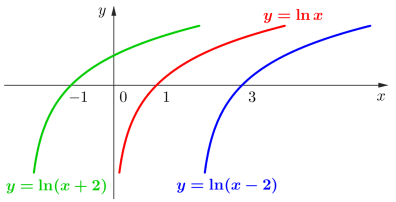
**b)** $f : y = \log_3(4 - x^2)$





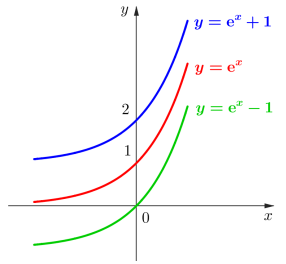
**Posunutí ve směru osy $x$:**

$$y = f(x \pm a),\ a \in \mathbb{R}^+$$




**Posunutí ve směru osy $y$:**

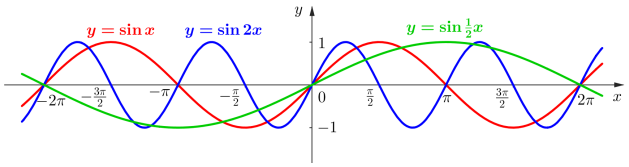
$$y = f(x) \pm a,\ a \in \mathbb{R}^+$$



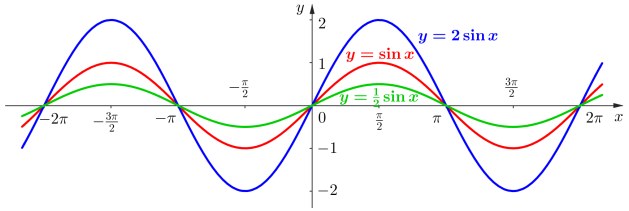





**Stlačení / roztažení ve směru osy $x$:** $y = f(ax),\ a \in \mathbb{R}^+$




**Stlačení / roztažení ve směru osy $y$:** $y = af(x),\ a \in \mathbb{R}^+$

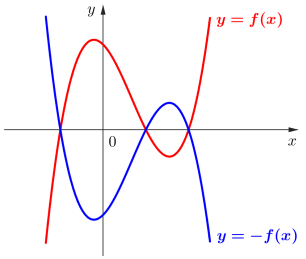






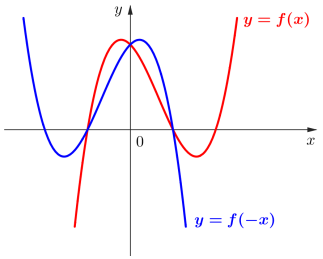

**Překlopení podle osy $x$:**

$$y = -f(x)$$




**Překlopení podle osy $y$:**

$$y = f(-x)$$



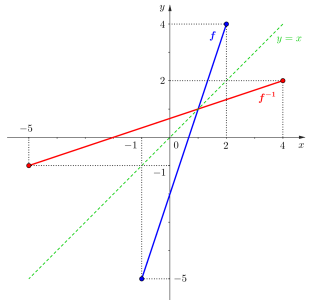
$f : y = 3x - 2, \quad x \in \langle -1, 2 \rangle$ … úsečka mezi body $[-1, -5]$ a $[2, 4]$

$\downarrow$ zaměníme proměnné $x$ a $y$

$x = 3y - 2$

$\downarrow$ vyjádříme proměnnou $y$

$f^{-1} : y = \dfrac{x+2}{3}, \quad x \in \langle -5, 4 \rangle$ … úsečka mezi body $[-5, -1]$ a $[4, 2]$




$f^{-1}$ … inverzní funkce k funkci $f$





**Definice**

Je-li $f$ **prostá** funkce v $D(f)$, pak k ní existuje **inverzní funkce** $f^{-1}$ definovaná na $H(f)$, přičemž platí

$$[x, y] \in \mathrm{Gr}\ f \iff [y, x] \in \mathrm{Gr}\ f^{-1}$$

**Platí**

- $D(f^{-1}) = H(f), \ H(f^{-1}) = D(f)$
- $f(f^{-1}(x)) = x, \ x \in D(f^{-1})$ a $f^{-1}(f(x)) = x, \ x \in D(f)$
- $(f^{-1})^{-1} = f$





**Platí**

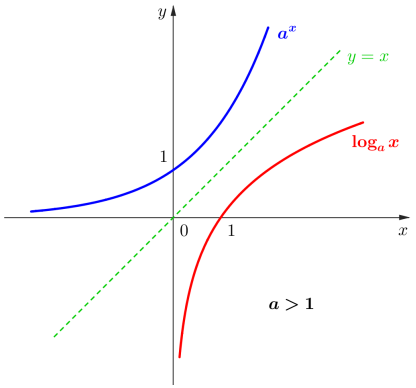
- Je-li funkce $f$ rostoucí/klesající, pak je také $f^{-1}$ rostoucí/klesající.
- Grafy funkcí $f$ a $f^{-1}$ jsou symetrické podle osy I. a III. kvadrantu (tj. přímky $y = x$).

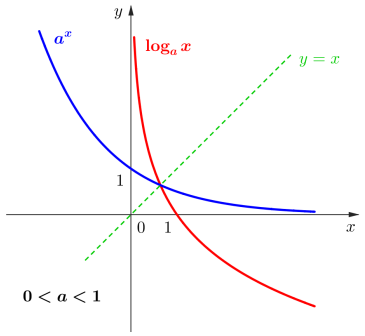
**Výpočet inverzní funkce $f^{-1}$ z funkce $f$:**

1. V zápisu funkce $y = f(x)$ zaměníme $x$ a $y$, čímž dostaneme $x = f(y)$.
2. Z rovnice $x = f(y)$ vyjádříme $y$ a máme předpis $y = f^{-1}(x)$.








$$a^{\log_a x} = x$$
$$\log_a a^x = x$$

**Poznámka:** Potřebujeme-li najít inverzní funkci k funkci $f$, která není prostá na celém $D(f)$, je třeba nejprve funkci $f$ omezit na interval, na němž je prostá.

$f : y = x^2 - 2,\ D(f) = \mathbb{R}$

*není prostá*

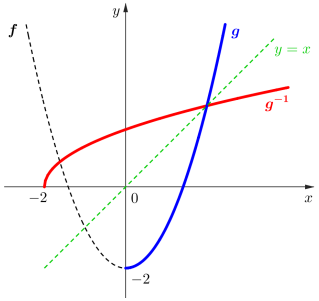
↓

$g : y = x^2 - 2,\ D(g) = \langle 0, \infty)$

*je prostá*

↓

$g^{-1} : y = \sqrt{x+2},\ D(g^{-1}) = \langle -2, \infty)$





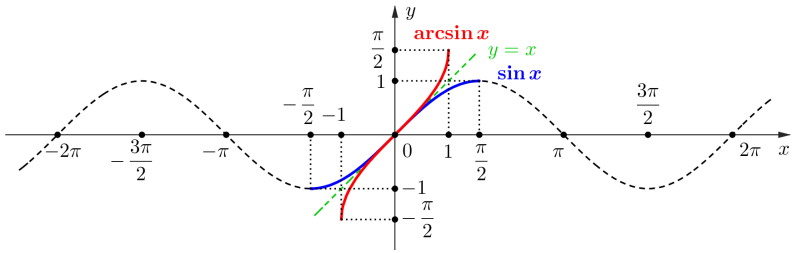



## Cyklometrické funkce

– funkce inverzní ke goniometrickým funkcím

### Arkussinus $y = \arcsin x$

- $D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$

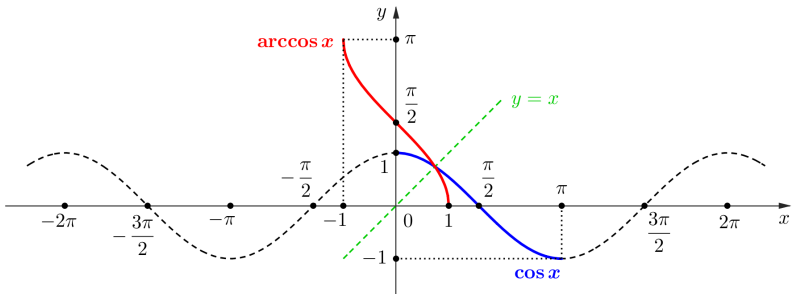







### Arkuskosinus $y = \arccos x$

- $D(f) = \langle -1, 1\rangle,\ H(f) = \langle 0, \pi\rangle$

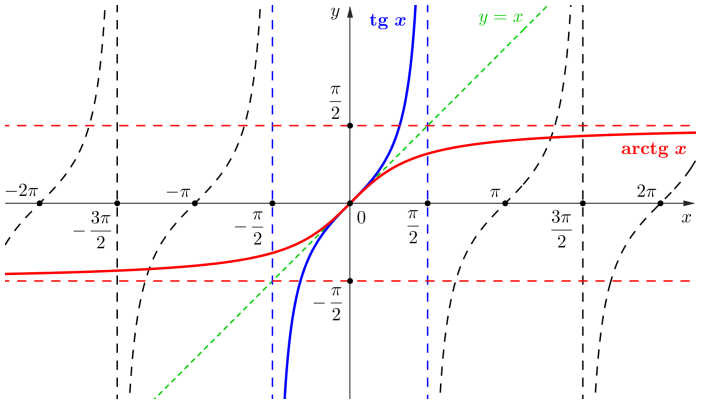






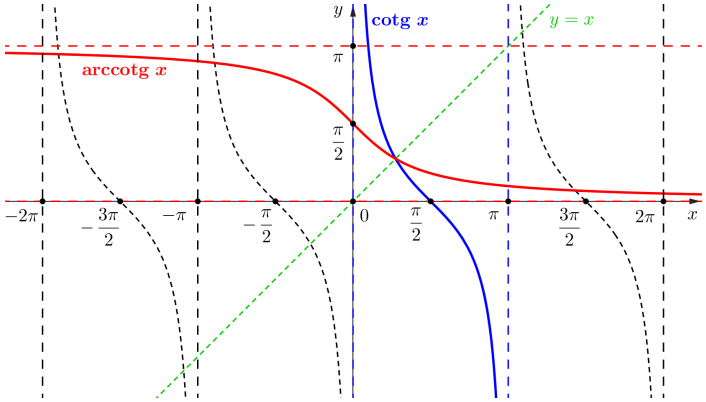

### Arkustangens $y = \operatorname{arctg} x$

- $D(f) = \mathbb{R},\ H(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



**Arkuskotangens** $y = \operatorname{arccotg} x$

- $D(f) = \mathbb{R}, \quad H(f) = (0, \pi)$








| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\arcsin x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\arccos x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $0$ |

| $x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{arctg} x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arccotg} x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |





## Příklad 5.3

Určete inverzní funkci $f^{-1}$ k funkci $f$ a definiční obor funkcí $f$ a $f^{-1}$.

**a)** $f : y = \mathrm{e}^{2x-1}$

**b)** $f : y = \arcsin(1 - x)$