



FAKULTA ústav  
STAVEBNÍ matematiky  
a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

## 3. DERIVACE FUNKCE

3.3 Diferenciál funkce

3.4 Taylorův polynom

3.5 L'Hospitalovo pravidlo

3.6 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Předpokládejme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  vlastní derivaci  $f'(x_0)$ .  
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

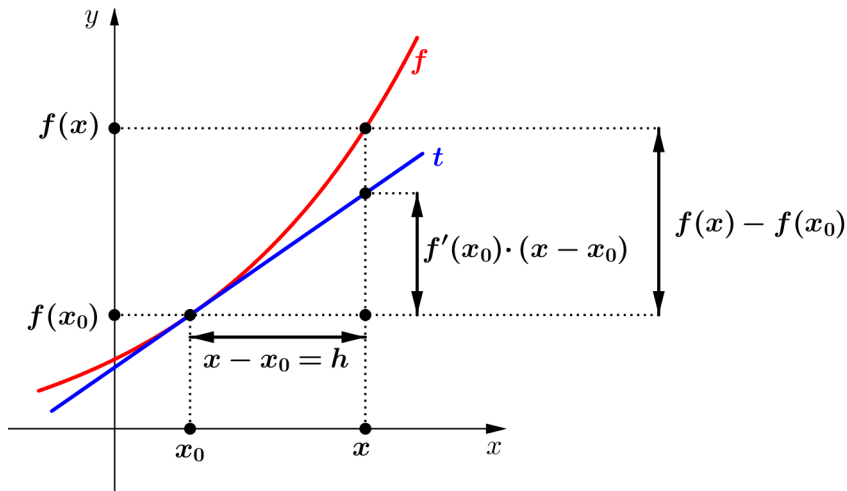
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj. } f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} = f'(x_0) \cdot h$$



### Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci, pak výraz

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce  $f$  v bodě  $x_0$**  pro přírůstek  $h$  nezávisle proměnné  $x$ .

### Příklad

Určete  $df(4; 0, 1)$  pro  $f(x) = \sqrt{x}$ .

### Příklad

Určete přibližně hodnotu  $\ln \frac{5}{4}$ .

### Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci  $f^{(n)}(x_0)$ , pak výraz

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem  $n$ -tého řádu funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

... diferenciál 1. řádu

$$d^2 f(x_0, h) = f''(x_0) \cdot h^2$$

... diferenciál 2. řádu

$$d^3 f(x_0, h) = f'''(x_0) \cdot h^3$$

... diferenciál 2. řádu

⋮

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

... diferenciál  $n$ -tého řádu

### Příklad

Určete  $d^3 f(2; 0, 1)$  pro  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

### Definice

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivace až do řádu  $n$ , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

kde  $x_0, x \in \mathbb{R}$ , se nazývá **Taylorův polynom** stupně  $n$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Je-li  $x_0 = 0$ , pak se polynom  $T_n$  nazývá **Maclaurinův polynom**.

Funkci  $R_n$ , definovanou vztahem  $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$  nazýváme **zbytkem** řádu  $n$ .



### Poznámky:

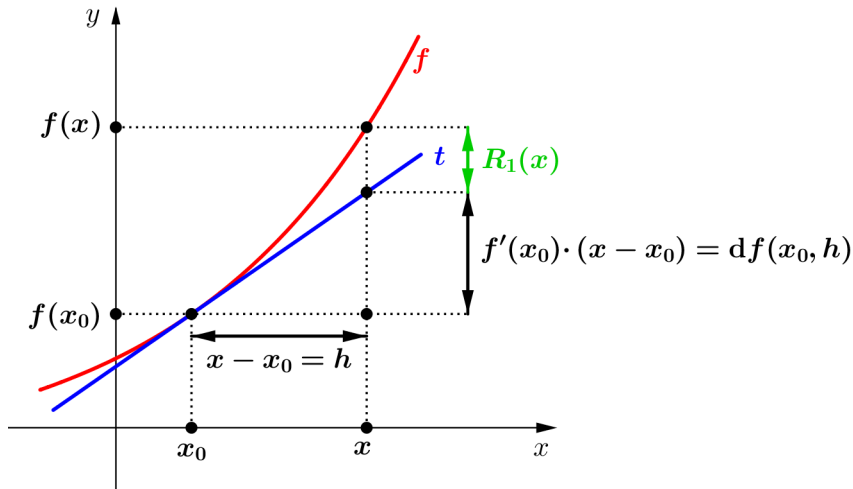
- Taylorův polynom slouží k aproximaci (nahrazení) funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$  polynomem stupně  $n$ , tzn. v okolí bodu  $x_0$  platí

$$f(x) \doteq T_n(x).$$

- Taylorův polynom stupně  $n$  funkce  $f$  v bodě  $x_0$  někdy značíme:  $T_n(f, x_0, x - x_0)$ .
- Taylorův polynom můžeme zapsat stručněji užitím diferenciálů:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0, h)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0, h)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, h)}{n!}$$

## 3.4 Taylorův polynom



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \dots$  tečna  $t$  – lineární aproximace.

### Příklad

Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce  $f(x) = x\sqrt{x}$  v bodě  $x_0 = 1$ .

### Příklad

Určete Maclaurinův polynom  $n$ -tého stupně funkce  $f(x) = xe^x$ .

### Příklad

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete  $\arctg \frac{1}{2}$ .

### Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce  $f$  a  $g$  v prstencovém okolí bodu  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

### Poznámky:

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$ .
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**.
- **POZOR!** Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme  $\frac{f(x)}{g(x)}$  jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

### Příklad

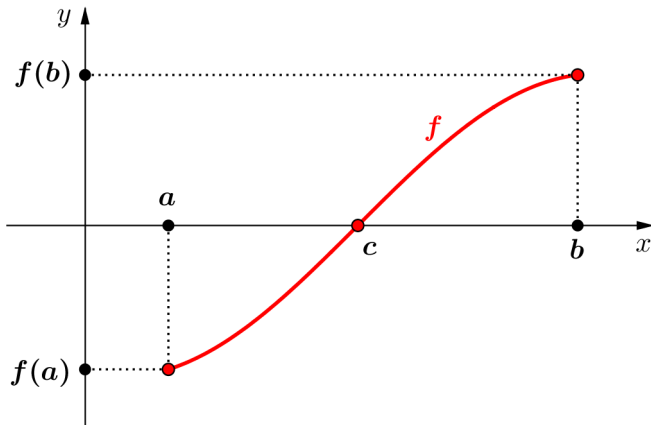
Pomocí L'Hospitalova pravidla určete limity:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x}{\ln x}$

b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$

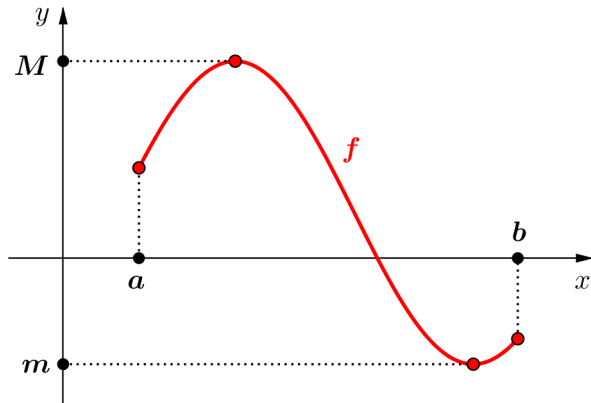
### Cauchyova věta o nulové hodnotě

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a platí-li  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f(c) = 0$ .



### Weierstrassova věta

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$ , pak je  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.



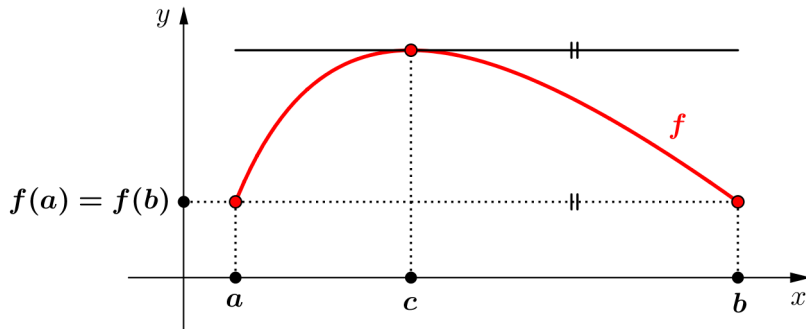
$$M = \max\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$$

$$m = \min\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$$



### Rolleova věta

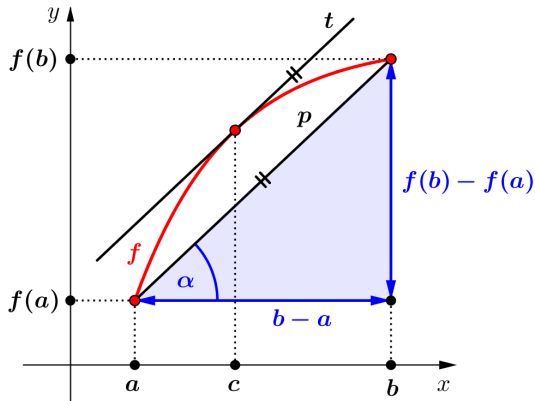
Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li derivaci v intervalu  $(a, b)$ , přičemž  $f(a) = f(b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f'(c) = 0$ .



Tečna grafu v bodě  $c$  je rovnoběžná s osou  $x$ .

### Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Je-li funkce  $f$  spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má-li derivaci v intervalu  $(a, b)$ , pak existuje  $c \in (a, b)$  tak, že  $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$ .



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$$

Tečna grafu v bodě  $c$  je rovnoběžná se spojnicí bodů  $[a, f(a)]$ ,  $[b, f(b)]$ .

**DĚKUJI  
ZA  
POZORNOST!**