FAKULTA STAVEBNÍ ústav matematiky a deskriptivní geometrie

BAA001 Matematika 1

3. DERIVACE FUNKCE

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura

Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018. ISBN: 978-80-7204-982-0

3.3 Diferenciál funkce

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$.
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

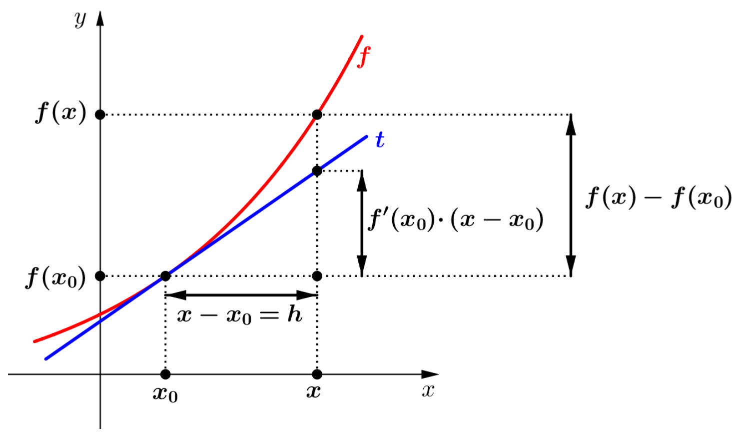
$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{v } \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

tj. $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\text{přírůstek funkčních hodnot na tečně}} = f'(x_0) \cdot h$$

3.3 Diferenciál funkce



Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x_0}) \cdot \boldsymbol{h}$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** pro přírůstek h nezávisle proměnné x.

Příklad 3.6

a) Určete $\mathrm{d}f(4; 0,1)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$.

b) Pomocí diferenciálu určete přibližně hodnotu $\sqrt{4,1}$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak výraz

$$\mathbf{d}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0},\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{f}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{x_0}) \cdot \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{n}}$$

nazýváme **diferenciálem n-tého řádu funkce f v bodě x_0**.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(x_0,h) &= f'(x_0) \cdot h && \text{... diferenciál 1. řádu}\\
\mathrm{d}^2 f(x_0,h) &= f''(x_0) \cdot h^2 && \text{... diferenciál 2. řádu}\\
\mathrm{d}^3 f(x_0,h) &= f'''(x_0) \cdot h^3 && \text{... diferenciál 2. řádu}\\
&\vdots\\
\mathrm{d}^n f(x_0,h) &= f^{(n)}(x_0) \cdot h^n && \text{... diferenciál n-tého řádu}
\end{aligned}$$

Příklad 3.7

Určete $\mathrm{d}^3 f(2; 0,1)$ pro $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n, pak polynom

$$\boldsymbol{T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom T_n nazývá **Maclaurinův polynom**.

Funkci R_n, definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n.

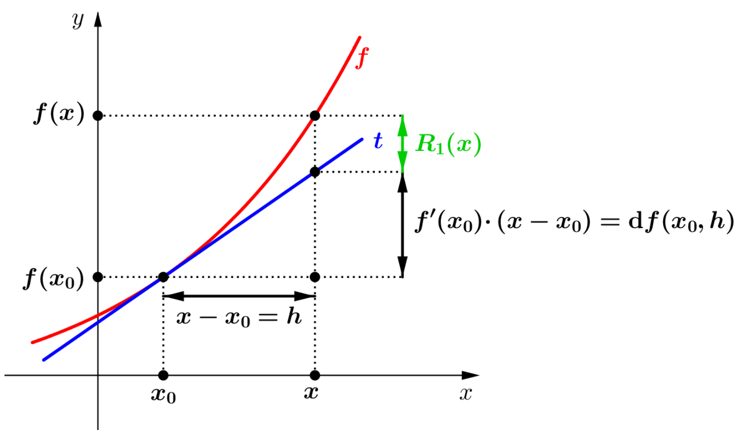
Poznámky:

- Taylorův polynom slouží k aproximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n, tzn. v okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \doteq T_n(x).$$

- Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0 někdy značíme: $T_n(f, x_0, x - x_0)$.
- Taylorův polynom můžeme zapsat stručněji užitím diferenciálů:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0,h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0,h)}{n!}$$



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ … tečna t – lineární aproximace.

Příklad 3.8 !

Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce $f(x) = (x^2 - x)\ln x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad 3.9 !

Určete Maclaurinův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \ln \mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{2x}\sin 3x$.

Příklad 3.10

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky:

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**.
- **POZOR!** Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Příklad 3.11

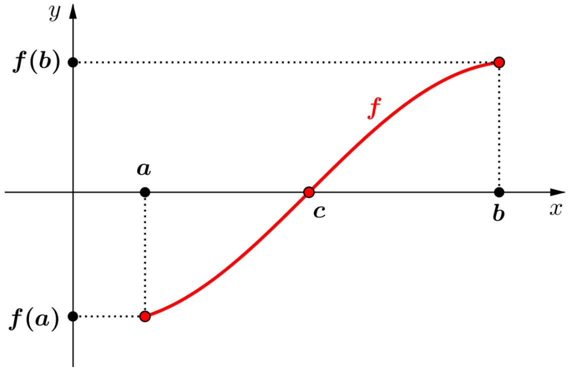
Pomocí L'Hospitalova pravidla určete limity:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - x}{\ln x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$

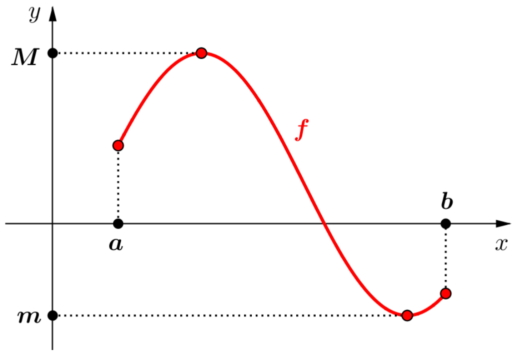
Cauchyova věta o nulové hodnotě

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li $f(a)\cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Weierstrassova věta

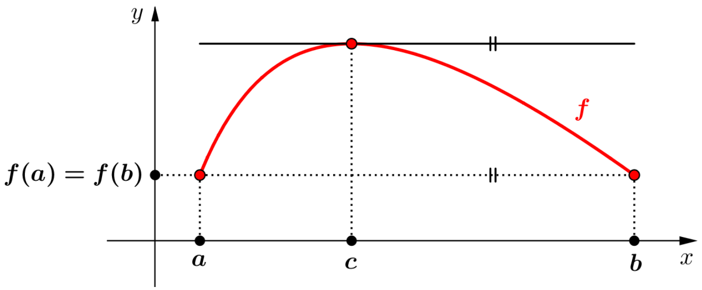
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.



$$M = \max\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$
$$m = \min\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$

Rolleova věta

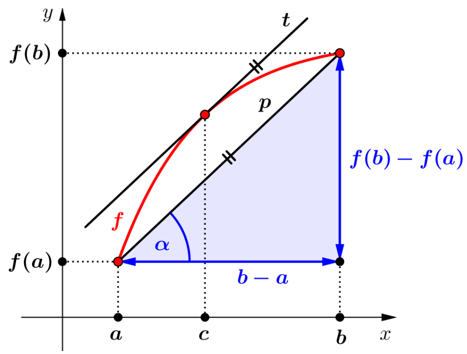
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná s osou x.

Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b - a)$.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg}\alpha$$

Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.