



BAA001 Matematika 1

3. DERIVACE FUNKCE

3.3 Diferenciál funkce

3.4 Taylorův polynom

3.5 L'Hospitalovo pravidlo

3.6 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

Základní literatura



Dlouhý, Oldřich – Tryhuk, Václav: *Matematika I, Diferenciální počet funkce jedné reálné proměnné*, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o. Brno, 2018.
ISBN: 978-80-7204-982-0

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$.
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

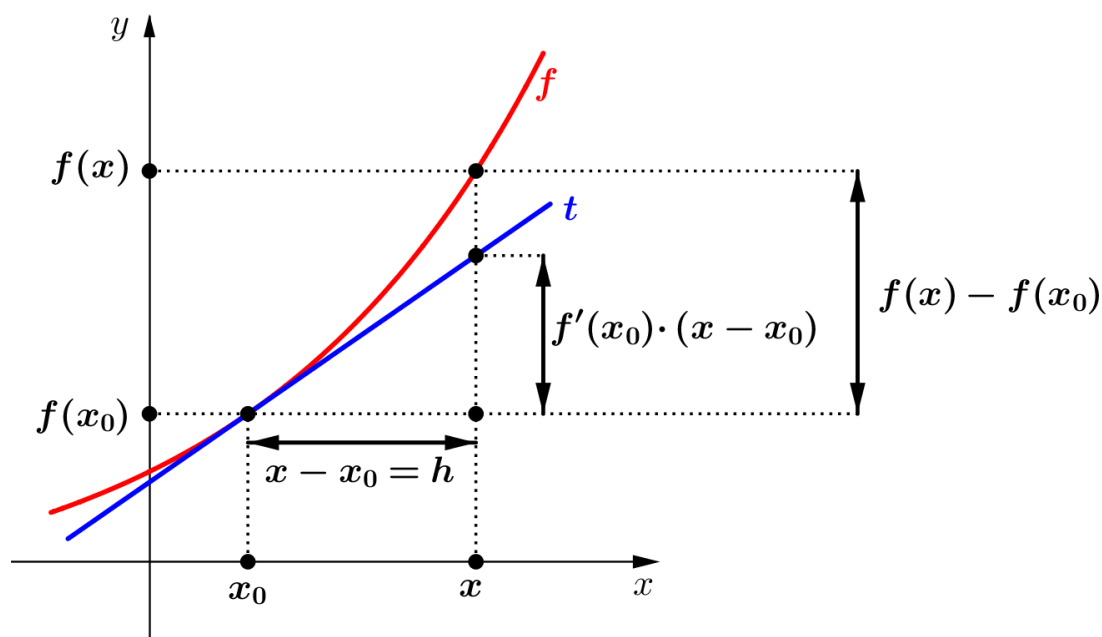
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{P}(x_0, \delta); \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \forall \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

tj. $f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\Rightarrow \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} = f'(x_0) \cdot h$$



Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce f v bodě x_0** pro přírůstek h nezávisle proměnné x .

Příklad 3.6

- Určete $df(4; 0, 1)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$.
- Pomocí diferenciálu určete přibližně hodnotu $\sqrt{4,1}$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak výraz

$$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$$

nazýváme **diferenciálem n -tého řádu funkce f v bodě x_0** .

$df(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$... diferenciál 1. řádu
$d^2 f(x_0, h) = f''(x_0) \cdot h^2$... diferenciál 2. řádu
$d^3 f(x_0, h) = f'''(x_0) \cdot h^3$... diferenciál 2. řádu
\vdots	
$d^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n$... diferenciál n -tého řádu

Příklad 3.7

Určete $d^3 f(2; 0, 1)$ pro $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n , pak polynom

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0 .

Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom T_n nazývá **Maclaurinův polynom**.

Funkci R_n , definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n .

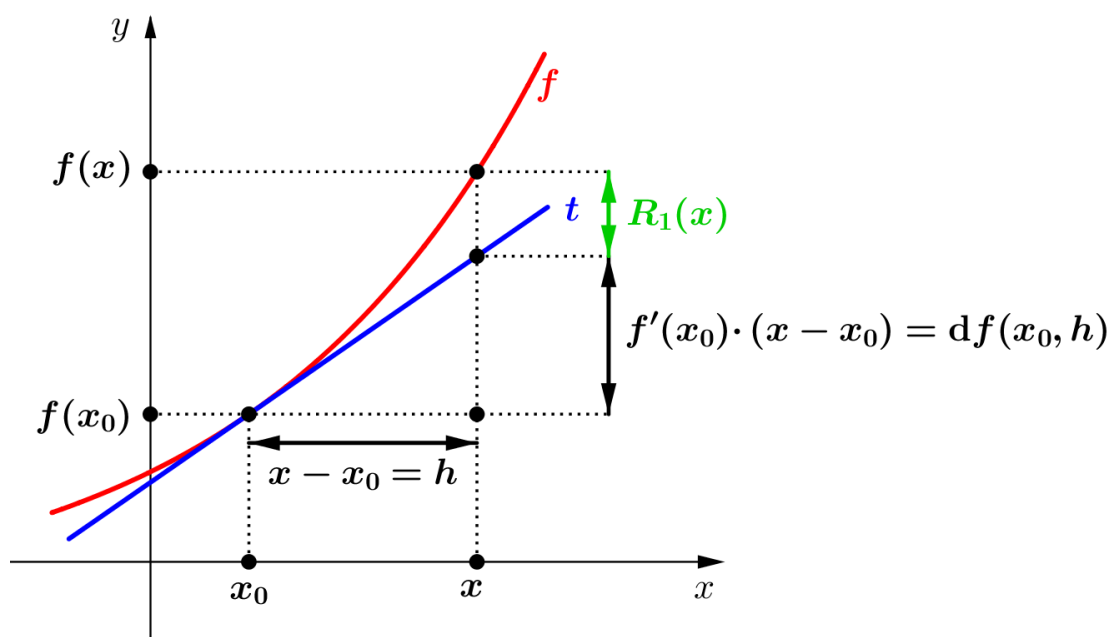
Poznámky:

- Taylorův polynom slouží k aproximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n , tzn. v okolí bodu x_0 platí

$$f(x) \doteq T_n(x).$$

- Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0 někdy značíme: $T_n(f, x_0, x - x_0)$.
- Taylorův polynom můžeme zapsat stručněji užitím diferenciálů:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0, h)}{1!} + \frac{d^2f(x_0, h)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(x_0, h)}{n!}$$



$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$... tečna t – lineární aproximace.

Příklad 3.8



Určete Taylorův polynom 5. stupně funkce $f(x) = (x^2 - x) \ln x$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad 3.9



Určete Maclaurinův polynom 3. stupně funkce $f(x) = \ln e^4 + e^{2x} \sin 3x$.

Příklad 3.10

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\arctg \frac{1}{3}$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Poznámky:

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**.
- **POZOR!** Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Příklad 3.11

Pomocí L'Hospitalova pravidla určete limity:

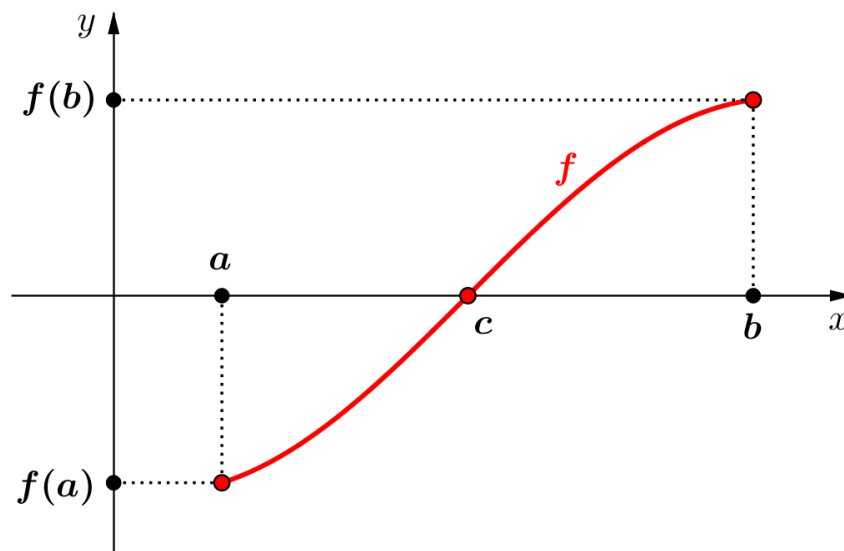
a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3}{x^3}$

3.6 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

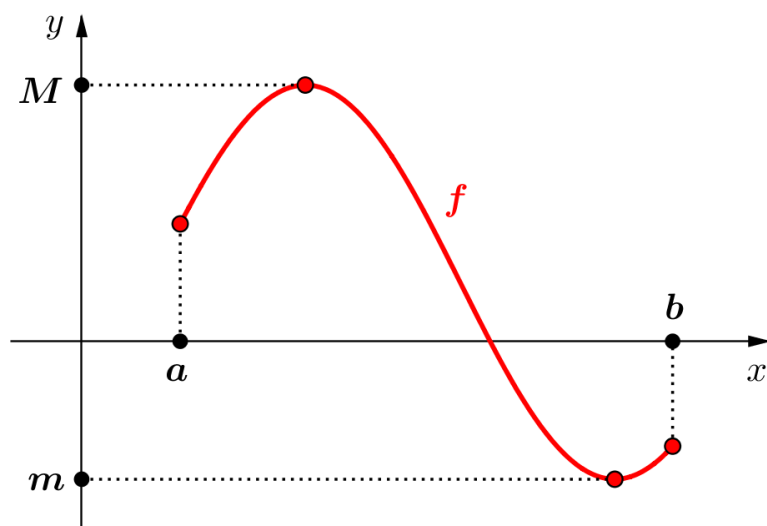
Cauchyova věta o nulové hodnotě

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



Weierstrassova věta

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b \rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.

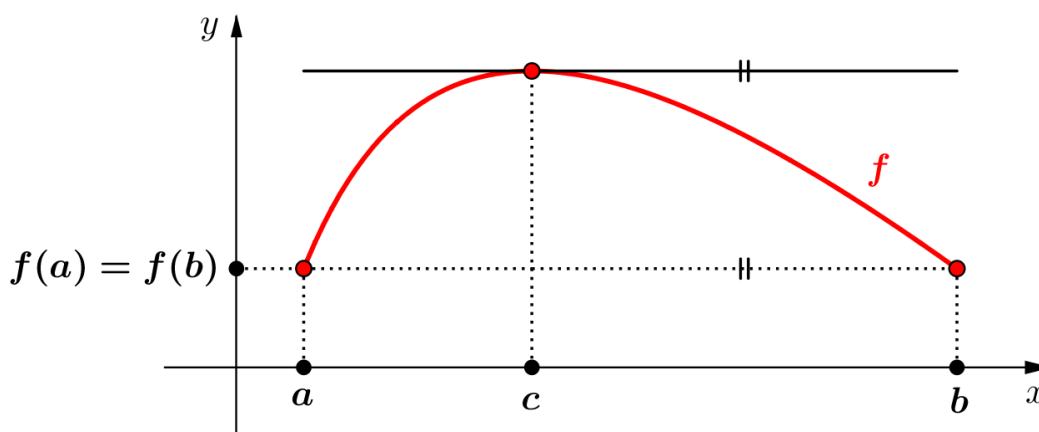


$$M = \max\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$$

$$m = \min\{f(x); x \in \langle a, b \rangle\}$$

Rolleova věta

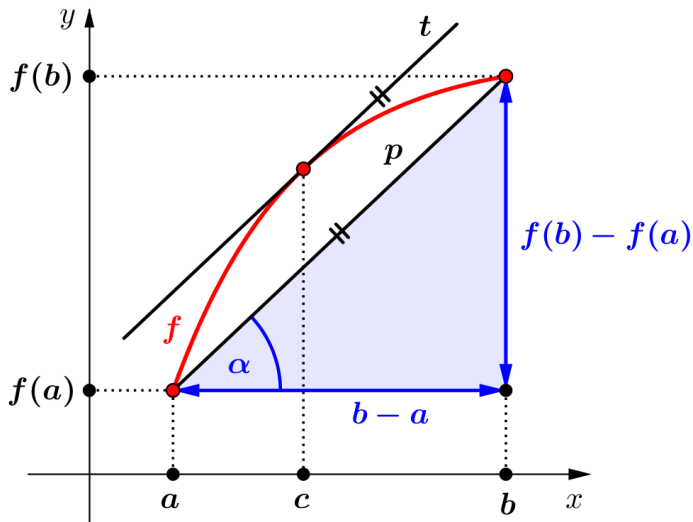
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b) , přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná s osou x .

Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b) , pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$$

Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.