BAA001 Matematika 1

3. DERIVACE FUNKCE

3.3 Diferenciál funkce
3.4 Taylorův polynom
3.5 L'Hospitalovo pravidlo
3.6 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Mgr. BLANKA MORÁVKOVÁ, Ph.D.

3.3 Diferenciál funkce

Předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 vlastní derivaci $f'(x_0)$.
Pak platí:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

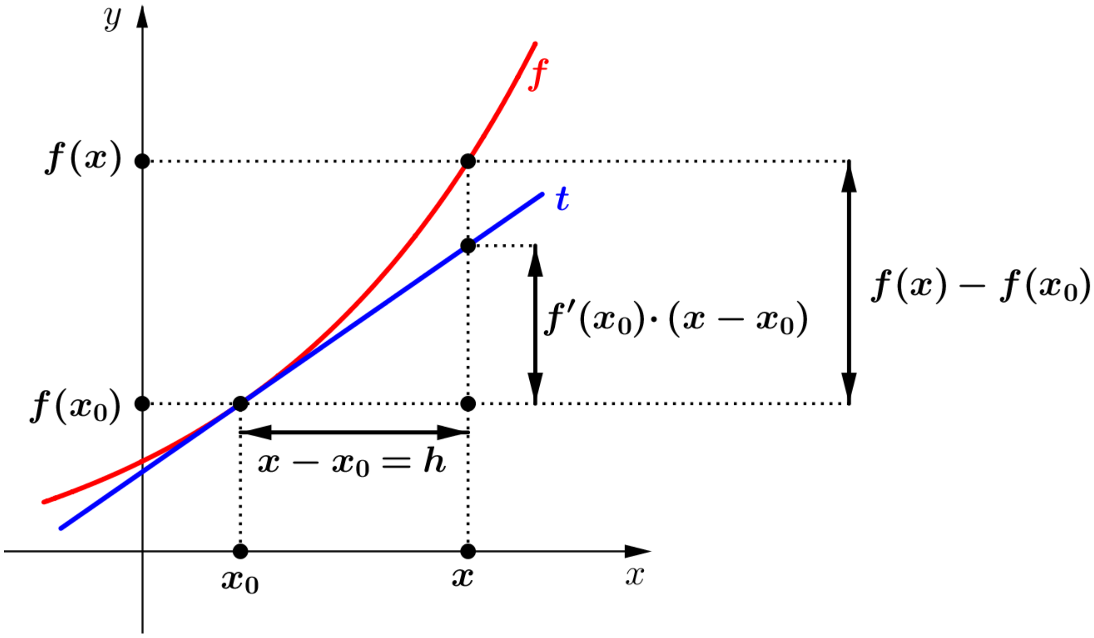
$$\Rightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathcal{P}(x_0, \delta); \quad \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad f'(x_0) \doteq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{v } \mathcal{P}(x_0, \delta)$$

$$\text{tj.} \quad f(x) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$t : y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{f(x) - f(x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních} \\ \text{hodnot}}} \doteq \underbrace{f'(x_0) \cdot (x - x_0)}_{\substack{\text{přírůstek} \\ \text{funkčních hodnot} \\ \text{na tečně}}} = f'(x_0) \cdot h$$



Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, pak výraz

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h$$

nazýváme **diferenciálem funkce** f **v bodě** x_0 pro přírůstek h nezávisle proměnné x.

Příklad

Určete $\mathrm{d}f(4; 0,1)$ pro $f(x) = \sqrt{x}$.

Příklad

Určete přibližně hodnotu $\ln \frac{5}{4}$.

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci $f^{(n)}(x_0)$, pak výraz

$$\mathbf{d}^n \boldsymbol{f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n}$$

nazýváme **diferenciálem n-tého řádu funkce f v bodě x_0**.

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0) \cdot h \qquad \ldots \text{ diferenciál 1. řádu}$$
$$\mathrm{d}^2 f(x_0, h) = f''(x_0) \cdot h^2 \qquad \ldots \text{ diferenciál 2. řádu}$$
$$\mathrm{d}^3 f(x_0, h) = f'''(x_0) \cdot h^3 \qquad \ldots \text{ diferenciál 2. řádu}$$
$$\vdots$$
$$\mathrm{d}^n f(x_0, h) = f^{(n)}(x_0) \cdot h^n \qquad \ldots \text{ diferenciál n-tého řádu}$$

Příklad

Určete $\mathrm{d}^3 f(2; 0,1)$ pro $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

3.4 Taylorův polynom

Definice

Má-li funkce f v bodě x_0 derivace až do řádu n, pak polynom

$$\boldsymbol{T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

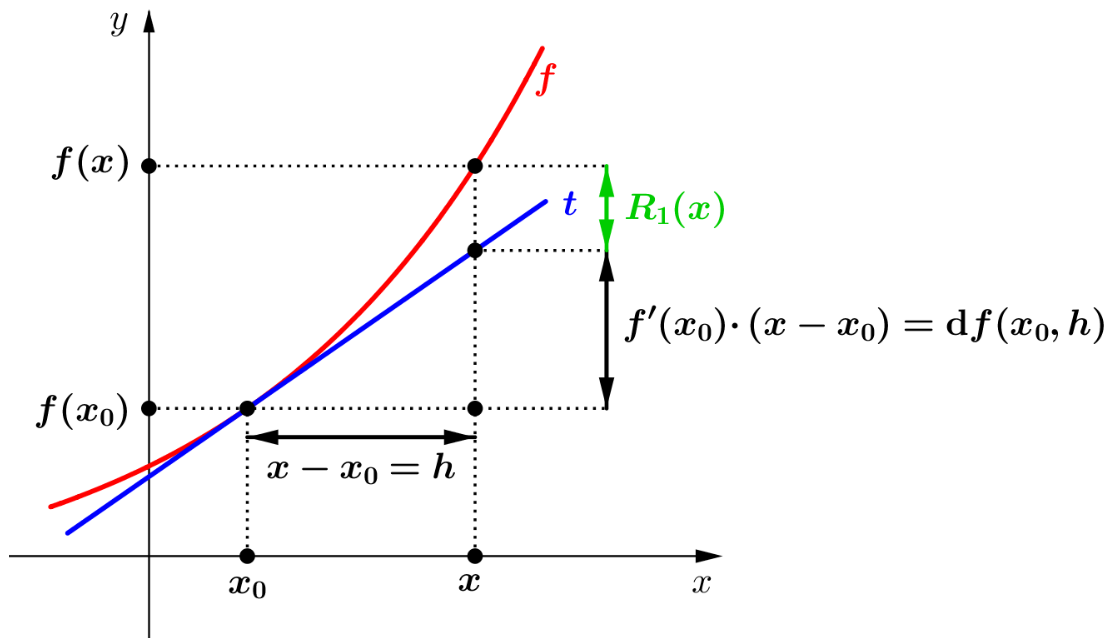
kde $x_0, x \in \mathbb{R}$, se nazývá **Taylorův polynom** stupně n funkce f v bodě x_0.

Je-li $x_0 = 0$, pak se polynom T_n nazývá **Maclaurinův polynom**.

Funkci R_n, definovanou vztahem $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ nazýváme **zbytkem** řádu n.

Poznámky:

- Taylorův polynom slouží k aproximaci (nahrazení) funkce f v okolí bodu x_0 polynomem stupně n, tzn. v okolí bodu x_0 platí
$$f(x) \doteq T_n(x).$$
- Taylorův polynom stupně n funkce f v bodě x_0 někdy značíme: $T_n(f, x_0, x - x_0)$.
- Taylorův polynom můžeme zapsat stručněji užitím diferenciálů:
$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f(x_0,h)}{1!} + \frac{\mathrm{d}^2 f(x_0,h)}{2!} + \cdots + \frac{\mathrm{d}^n f(x_0,h)}{n!}$$



$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$ … tečna t – lineární aproximace.

Příklad

Určete Taylorův polynom 3. stupně funkce $f(x) = x\sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 1$.

Příklad

Určete Maclaurinův polynom n-tého stupně funkce $f(x) = xe^x$.

Příklad

Pomocí Taylorova polynomu 3. stupně přibližně určete $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

Věta (L'Hospitalovo pravidlo)

Mají-li funkce f a g v prstencovém okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$ konečné derivace a platí-li

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty,$$

pak platí

$$\boldsymbol{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}.$$

Poznámky:

- L'Hospitalovo pravidlo lze použít **jen** u limit typu $\frac{0}{0}$, $\frac{\text{cokoliv}}{\pm\infty}$.
- L'Hospitalovo pravidlo lze použít i **opakovaně**.
- **POZOR!** Při použití L'Hospitalova pravidla nederivujeme $\frac{f(x)}{g(x)}$ jako podíl, ale derivujeme zvlášť funkci v čitateli a zvlášť funkci ve jmenovateli.

Příklad

Pomocí L'Hospitalova pravidla určete limity:

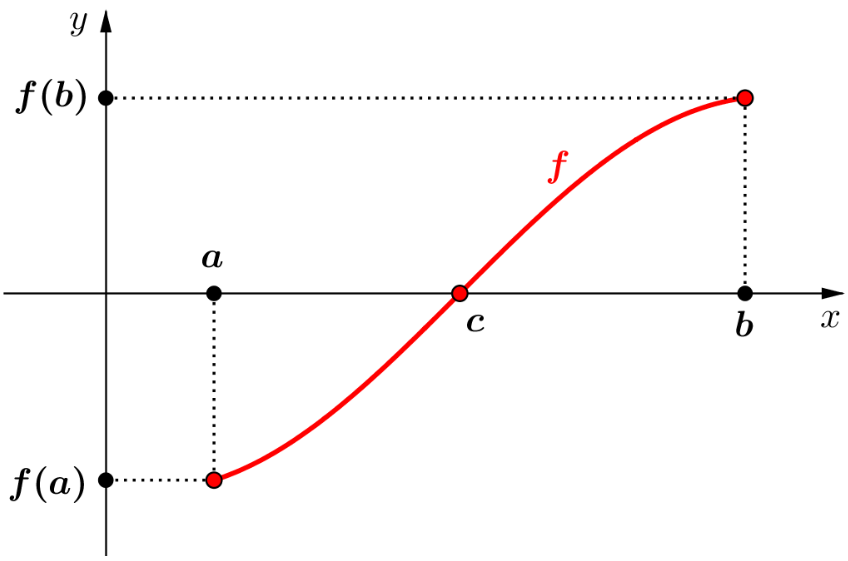
a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\ln x}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x^3}{x^3}$

T FAST

Cauchyova věta o nulové hodnotě

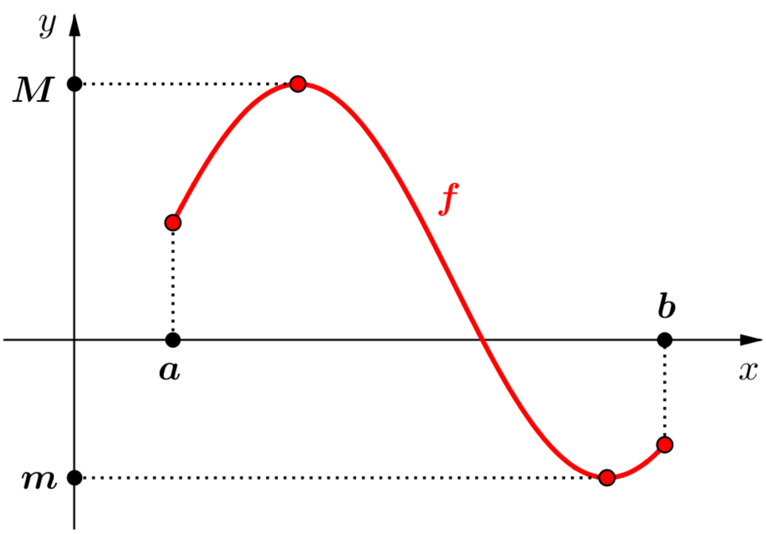
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a platí-li $f(a) \cdot f(b) < 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f(c) = 0$.



T FAST

Weierstrassova věta

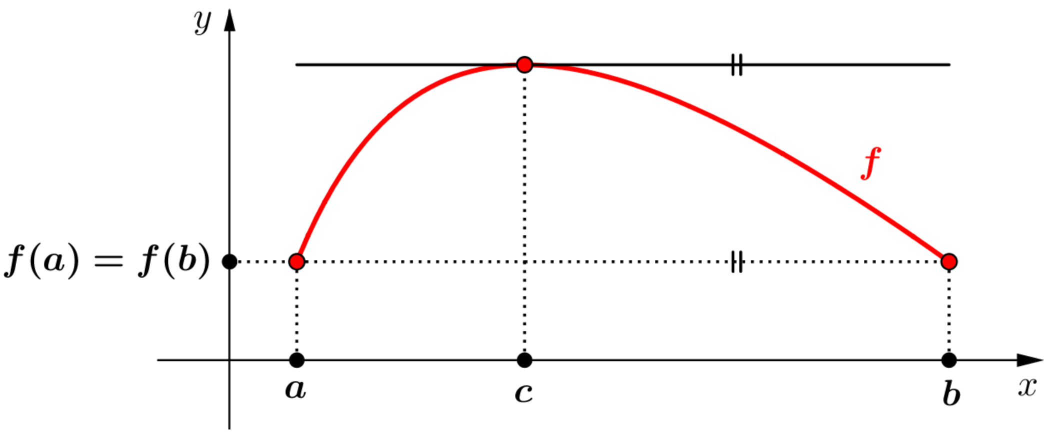
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je f na intervalu $\langle a, b\rangle$ ohraničená a nabývá na něm své největší a nejmenší hodnoty.



$$M = \max\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$
$$m = \min\{f(x); x \in \langle a, b\rangle\}$$

Rolleova věta

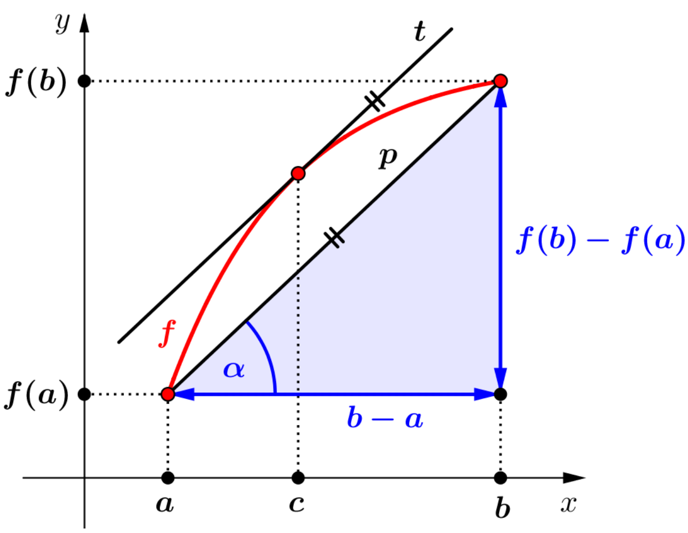
Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), přičemž $f(a) = f(b)$, pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.



Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná s osou x.

Lagrangeova věta o přírůstku funkce

Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v intervalu (a, b), pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.



$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \operatorname{tg} \alpha$$

Tečna grafu v bodě c je rovnoběžná se spojnicí bodů $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$.

DĚKUJI
ZA
POZORNOST!